

# Előre jelezhető-e a magyar GDP?

BIRÓ Lóránt<sup>1</sup>

DOI: [10.29180/978-615-6886-28-6\\_2](https://doi.org/10.29180/978-615-6886-28-6_2)

## Absztrakt

Az adatok mennyiségének növekedésével – így van ez az idősorok esetében is – egyre nagyobb szerepe lesz a megbízható idősor-előrejelzési technikáknak. A klasszikus módszerek (pl. ARIMA, különböző simító eljárások stb.) mellett más megközelítésű módszerek is egyre nagyobb számban vannak jelen (neurális hálók, nemlineáris módszerek stb.). Azonban a módszerek kiválasztásától függetlenül érdemes megvizsgálni, hogy statisztikailag egyáltalán előre jelezhető-e az idősor értéke, vagyis mennyire véletlenszerű vagy determinisztikus az idősor viselkedése. E tulajdonság vizsgálatára bevált módszerek az ismétlődési diagram (*Recurrence Plot*, RP) és a hozzá kapcsolódó analízis (*Recurrence Quantification Analysis*, RQA), melyek olyan nem klasszikus idősorelemzési módszerek, amelyek akár nemlineáris dinamikus rendszerekkel és nem stacionárius rendszerekkel is működnek. Az elemzés során különféle indikátorok pl. ismétlődési ráta, determinizmus, valamint számos az ismétlődési diagramból számszerűsített értékek segítségével lehet vizsgálni és jellemezni az idősort, melyekből jelen tanulmányban az ismétlődési arányt (*Recurrence Rate*, RR%) és a determinizmus (*Determinism*, DET%) értékeit vizsgáljuk meg. Az indikátorok nemcsak az idősor teljes időtartamára számíthatók, hanem különböző ablakméretek használatával mozgóátlagként is, így az indikátorok változásai időbelileg követhetők. A választott idősor a magyarországi bruttó hazai termék (*Gross Domestic Product*, GDP) 1996 és 2024 közötti negyedéves volumenindexei voltak.

Kulcsszavak: GDP, ismétlődési diagram (*Recurrence Plot*), visszatérési analízis (*Recurrence Quantification Analysis*), idősor előrejelzés

## Bevezetés

A klasszikus idősorelemzési technikák (leíró statisztika, ARIMA stb.) mellett a modern idősorelemzési technikák új megközelítést tesznek lehetővé. Ily módon lehetőség van a káosz előfordulásának vizsgálatára az idősorokon belül, mivel a determinisztikus káosz jelensége még egyszerű nemlineáris determinisztikus rendszerekben is megfigyelhető (Lorenz, 1993). A nemlineáris rendszerek alapvető jellemzőinek becslésére szolgáló technikákat különböző tudományterületeken nagy sikerrel alkalmazták (fraktál dimenziók, Ljapunov-exponensek, Kolmogorov-entrópia stb., Kantz & Schreiber, 2003). Az ismétlődési diagramok (*Recurrence Plot*, RP) Eckmann, Kamphorst és Ruelle által 1987-ben kidolgozott grafikus eszközök, amelyek a fázistér-rekonstrukción alapulnak (Eckmann et al., 1987). 1992-ben Zbilut és Webber (Zbilut & Webber, 1992) javasolták az RP-k statisztikai kvantifikálását, és a visszatérési analízis (*Recurrence Quantification Analysis*, RQA) nevet adták neki. Az RP és RQA technikák célja itt nem a káosz létezésének bizonyítása, hanem a nem stacionárius és zajos idősorok analízise (Zbilut et al., 1998), a mintázatban bekövetkező változások, különösen a törések, például a fázisátmenetek detektálása (Lambertz et al., 2000), valamint az idősorok egyéb dinamikus tulajdonságainak megismerése (Eckmann et al. 1987).

---

<sup>1</sup> Budapesti Gazdaságtudományi Egyetem, Nemzetközi Gazdálkodás Kar, [biro.lorant@uni-bge.hu](mailto:biro.lorant@uni-bge.hu)

Jelen munka célja a hazai GDP (*Gross Domestic Product*) vagyis bruttó hazai termék 1996 és 2024 közötti negyedéves volumenindex idősorának vizsgálata ismétlődési diagram és a visszatérési analízis módszereinek segítségével, melyek eredményeként választ kapunk arra a kérdésre, hogy mennyire determinisztikus, vagyis előre jelezhető-e az idősor.

## Módszer és adat

Egy dinamikus rendszer, mint például a GDP idősor vizsgálata számos kihívást jelent, elsősorban a rendszerben részt vevő számos változó ismeretének hiánya miatt; a megoldás azonban a rendszer fázistér-rekonstrukciójában rejlik. Az egydimenziós idősorok fázistér-rekonstrukcióját Takens beágyazási tételének (1981) segítségével végezhető el, amely az (1) egyenlettel megadott időeltolódást becsüli egy  $m$ -dimenziós beágyazási fázistér és egy gondosan megválasztott  $\tau$  időeltolódás felhasználásával.

$$X^m(t) = [x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)] \quad (1)$$

Egy megfelelő beágyazási dimenzió ( $m$ ) megadja egy dinamikus rendszer tulajdonságait, és megőrzi annak topológiai geometriáját a fázistér rekonstrukciója során. Az adatok túl kicsi vagy túl nagy beágyazása hamis ismétlődési értékhez és helytelen geometriai reprezentációhoz vezet (Marwan et al., 2007). Az időbeli késleltetéseket  $\tau$  a kölcsönös információs (*Mutual Information*, MI) függvény első minimumából számítható ki (Fraser & Swinney 1986). A minimálisan elegendő beágyazási dimenzió a hamis legközelebbi szomszéd módszerével (*False Nearest Neighbor*, FNN) becsülhető (Kennel et al., 1992) mégpedig úgy, hogy ha a hamis legközelebbi szomszédok százalékos aránya nullára csökken, abban a pontban mért beágyazási dimenzió lesz az optimális.

Az Eckmann és munkatársai (1987) által bevezetett ismétlődési diagramok tulajdonképpen az állapotok visszatéréseinek négyzetes mátrixban történő megjelenítései, amelyben a mátrixelemek megfelelnek azoknak az időpontoknak, amikor egy dinamikus rendszer állapota visszatér (az oszlopok és sorok egy bizonyos időpontpárnak felelnek meg). Egy állapot visszatérését tehát az  $i$  és  $j$  időpontban egy fekete pont jelöli az  $i, j$  koordinátáknál. Mátrixról lévén szó, a visszatérési diagramnak van egy fekete főátlója, amelyet egységvonalnak nevezünk. Tehát, ha az  $(i, j)$  pontot visszatérőnek jelöljük, vagyis a  $j$  állapot az  $i$  középpontú,  $\epsilon$  méretű környezetéhez tartozik; ez azt jelenti, hogy a rendszer állapota az  $i$  időpontban valamilyen „hasonlóságot” mutat a rendszer  $j$  időpontbeli állapotával, más szóval azt mondhatjuk, hogy a rendszer közeli „pályákon” marad.

Az eredeti koncepció kiterjesztése és kvantitatívabbá tétele érdekében Zbilut és Webber (1992) kidolgoztak egy visszatérési analízisnek (RQA) nevezett módszertant, melynek eredményeként számos változót határoztak meg az ismétlődések, visszatérések számszerűsítésére, amelyek a következők:

- Ismétlődési arány (RR%) az ismétlődő pontok százalékos aránya, vagyis az ismétlődő állapotok (fekete pixelek) aránya az összes lehetséges állapothoz képest.
- Determinizmus (DET%) az átlós vonalszerkezetekkel párhuzamos vonalszakaszokat alkotó ismétlődő pontok százalékos aránya.
- Az átlagos átlós vonalhossz (L) azt az időtartamot jelzi, amely alatt egy állapot nem változik, vagy nagyon lassan változik.
- A leghosszabb átlós vonalhossz (LMAX) a főátlóval párhuzamosan mért leghosszabb vonalszakasz. Egy periodikus jel hosszú vonalszakaszokat hoz létre, míg a rövid vonalak káoszt vagy véletlenszerűséget jeleznek.
- A divergencia (DIV) a főátlóval párhuzamosan mért leghosszabb átlós szakasz inverzeként definiálható. Megmutatja, hogy a párhuzamos pályák milyen gyorsan térnek el egymástól. Minél rövidebb a leghosszabb vonal, annál divergensebbek lesznek a pályák.

- Az átlós vonalak entrópiája (LENTR) a főátlóval párhuzamos vonalszakaszok hosszának eloszlásának Shannon-entrópiája. Ha alacsony a rendszer entrópiája, akkor kevés információra van szükség a rendszer leírásához, ezzel szemben a magas entrópia azt jelzi, hogy sok információra van szükség. A magas entrópia a periodikus viselkedésre jellemző, míg az alacsony entrópia kaotikus viselkedésre utal.
- A laminaritás (LAM) a visszatérő pontok azon százalékos aránya, amelyek függőleges vagy vízszintes vonalszakaszokat alkotnak.
- Csapdázási idő (TT) azt az átlagos időt becsüli, amely alatt a rendszer egy adott állapotban van.
- Leghosszabb függőleges vonalhossz (VMAX) a leghosszabb időszak, amely alatt egy rendszer hasonló állapotban marad.

A módszertan független az idősor méretétől, annak stacionárius vagy instacionárius tulajdonságától, valamint az adatok eloszlásától, így az elemzés nemcsak az idősor teljes időtartamára, hanem adott ablakmérettel is elvégezhető. Ennek eredményeképpen az egyes RQA értékek időbeli alakulásáról is információt kapunk, melyek egyben a rendszer időbeli változásait is mutatják, vagyis mennyire determinisztikusan vagy véletlenszerűen viselkedik a rendszer egy adott időpontban.

A fent leírt értékeket a Python (3.10.9) programozási nyelven futó Jupyter Notebook (6.5.2) környezetben számítottam ki. A beágyazási dimenziókat és késleltetéseket a NoLiTSA modul (Mannattil et al., 2017), az RQA elemzést a PyRQA modul (Rawald, 2018), a rekurziós diagramokat pedig a RECLAC (Braun et al., 2021) modul segítségével végeztem el.

A vizsgált idősor adatai a Központi Statisztikai Hivatal hivatalos honlapjáról<sup>1</sup>, melyek a bruttó hazai termék szezonálisan és naptárhatással kiigazított és kiegyensúlyozott negyedéves volumenindexei (előző év azonos időszaka=100,0%) voltak. Az időtartamot tekintve az idősor 1996. év I. negyedévéől 2024. év IV. negyedévéig tartó 29 évet ölel fel, amely 116 volumenindexet jelent, ahogy az első ábrán is látható.



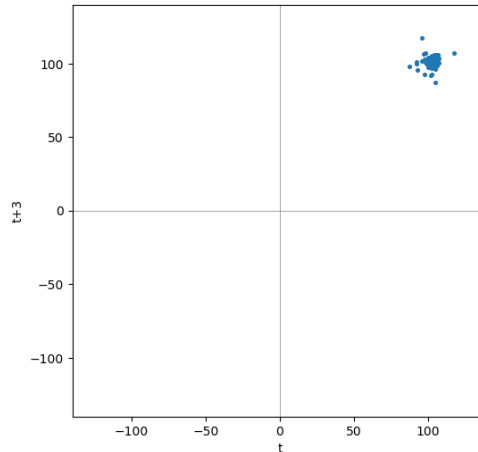
**1. ábra:** A bruttó hazai termék (GDP) negyedéves, szezonálisan és naptárhatással kiigazított, kiegyensúlyozott volumenindexei (előző év azonos időszaka=100,0%)

**Forrás:** Saját szerkesztés

<sup>1</sup> [https://www.ksh.hu/stadat\\_files/gdp/hu/gdp0086.html](https://www.ksh.hu/stadat_files/gdp/hu/gdp0086.html), letöltés 2025. 06. 01.

## Eredmények

A vizsgálat első lépéseként kiszámítottam a beágyazási dimenziókat ( $m$ ) és a késleltetéseket ( $\tau$ ). Ezek alapján a negyedéves GDP idősor beágyazási dimenziója, a teljes időtartamra vonatkozóan  $m=3$ , és az optimális késleltetés is  $\tau=3$ . Az idősor értékei a késleltetés értékével eltolva láthatók a második ábrán, amely alapján fontos információkat kapunk a rendszer dinamikájáról.



**2. ábra:** A bruttó hazai termék (GDP) negyedéves, szezonálisan és naptárhatással kiigazított, kiegyensúlyozott volumenindexeinek (előző év azonos időszaka=100,0%) visszatérési leképezése ( $\tau=3$ )

**Forrás:** Saját szerkesztés

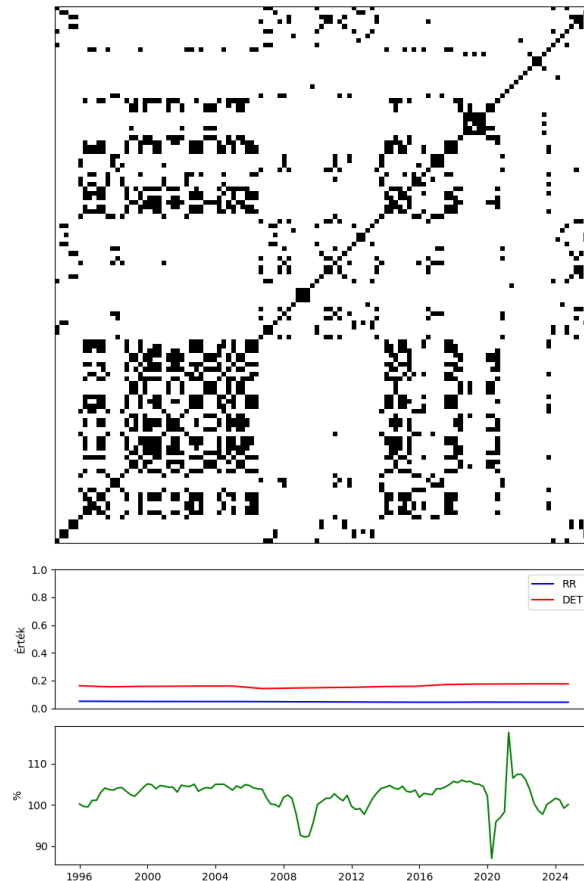
A beágyazási dimenzió ( $m$ ) és a késleltetés ( $\tau$ ) értékeinek felhasználásával elvégeztem a visszatérési analízist (RQA), melynek eredményeképpen az első táblázatban látható értékeket kaptam.

**1. táblázat:** A bruttó hazai termék (GDP) negyedéves, szezonálisan és naptárhatással kiigazított, kiegyensúlyozott volumenindexeinek (előző év azonos időszaka=100,0%) visszatérési analízis értékei

**Forrás:** Saját szerkesztés

Ismétlődési arány (RR%)	Determinizmus (DET%)	Átlagos átlós vonalhossz (L)	Leghosszabb átlós vonalhossz (LMAX)	Divergencia (DIV)	Átlós vonalak entrópiája (LENT)	Laminaritás (LAM)	Csapidázási idő (TT)	Leghosszabb függőleges vonalhossz (VMAX)
0,02	0,13	2,00	2,00	0,50	0,00	0,23	2,00	2,00

Az ismétlődési arány (RR%) és a determinizmus (DET%) időbeli változásának vizsgálatára kiszámítottam az értékek 100-as mozgó ablakkal és 1-es lépésközzel számolt értékeit is, melynek eredményeképpen az RR%, valamint a DET% értéke is időben állandónak tekinthető – ahogyan a harmadik ábrán is látható.



**3. ábra:** A bruttó hazai termék (GDP) negyedéves, szezonálisan és naptárhatással kiigazított, kiegyensúlyozott volumenindexeinek (előző év azonos időszaka=100,0%) ismétlődési diagramja, valamint ismétlődési arány és determinizmus mozgó értékei.

Felső ábra: visszatérési diagram, középső ábra: ismétlődési arány (RR%) és a determinizmus (DET%) mozgó ablakkal számolt értékei, alsó ábra: eredeti idősor.  
 Beágyazási paraméterek: beágyazási dimenzió=3, késleltetés=3, ablakméret=100, lépésköz=1.

**Forrás:** Saját szerkesztés

## Diszkusszió

A bruttó hazai termék (GDP) idősorának beágyazási dimenziója alapján a negyedéves értékek változását 3 folyamat okozza, amelyek alatt klasszikusan a fogyasztás, beruházás és az export-import különbségét is érthetjük. Az időbeli késleltetéssel ábrázolt értékek grafikonján – azaz a második ábra bal oldalán – a negyedéves volumenindexek a jobbfelső negyedben található (mivel indexekről van szó, így csak pozitív értékek találhatóak), azonban nem látható semmilyen mintázat, amely általában teljesen véletlenszerű folyamatra jellemző. A harmadik ábrán látható visszatérési diagram alapján nem látható periodikusan visszatérő mintázat (ebben az esetben rácshálózatot kellene látni), azonban a fekete pontok nem töltik ki egyenletesen a teret (nem szóródnak egyenletesen). A diagramon látható mintázat hasonló a véletlen bolyongás mintázatához, amely tiszta sztochasztikus folyamat eredménye. Az első táblázatban az RQA analízis során számított lévő értékek hasonlóan értelmezhetők, minden érték a determinizmus „ellentétét” jelzi. Tehát az értékek olyan tartományokban vannak, amelyek a legkisebb determinizmust is elutasítják, így az értékek alapján a vizsgált idősor értékei tisztán sztochasztikus folyamatok eredményei.

Fontos megemlíteni, hogy a káosz egyik jellemzője, hogy a sztochasztikus rendszerek is rendelkezhetnek kismértékű determinizmussal (a vizsgált GDP idősor DET% értéke átlagosan 13%, amely az idő során nemigen változik). Az alkalmazott módszerek (RP, RQA) leginkább a sztochasztikus-determinisztikus rendszerek megkülönböztetésére alkalmasak, egyrészt az RP-n látható minta, másrészt az RQA paraméterek értékei alapján. Saját, eddig nem publikált tapasztalataim alapján – több mint 50 különböző típusú (meteorológiai, karsztvízszint, árfolyam, vércukorszint, GDP, különböző zajtípusok függvényei, szinusz függvény stb.) hosszú távú idősor – a determinisztikus (függvényszerű) és sztochasztikus (zaj) rendszerek a második táblázatban látható értékekkel jellemezhetők.

## 2. táblázat: A determinisztikus és a sztochasztikus idősorok RQA paraméterei

Forrás: Saját szerkesztés

RQA paraméter	Determinisztikus	Sztochasztikus
Ismétlődési arány (RR%)	<0,5	~0
Determinizmus (DET%)	~1	<0,5
Átlagos átlós vonalhossz (L)	>10	~2
Leghosszabb átlós vonalhossz (LMAX)	>1000	<10
Divergencia (DIV)	<0,001	>0,1
Átlós vonalak entrópiája (LENTR)	>3	<1
Laminaritás (LAM)	~1	~0
Csapdázási idő (TT)	>60	~2
Leghosszabb függőleges vonalhossz (VMAX)	>100	<5

Összefoglalva az eredményeket, a bruttó hazai termék (GDP) negyedéves, szezonálisan és naptárhatással kiigazított, kiegyensúlyozott volumenindexeinek (előző év azonos időszaka=100,0%) idősora az RP és RQA vizsgálatok alapján sztochasztikus idősoroknak tekinthető a teljes időszakra vonatkozóan. Ebből kifolyólag klasszikus előrejelzési technikákkal nem igazán jelezhető előre, csak valószínűségi alapokon (pl. eloszlásvizsgálat) lehet megbecsülni a GDP negyedéves értékeinek alakulását.

### Irodalomjegyzék

Braun, T., Unni, V. R., Sujith, R. I., Kurths, J., Marwan, N. 2021. *Detection of dynamical regime transitions with lacunarity as a multiscale recurrence quantification measure*, *Nonlinear Dyn* 104, 3955–3973. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06457-5>

Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D. 1987. *Recurrence Plot of dynamical system*, *Europhys Lett* 4, 973-977. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/4/9/004>

Fraser, A. M., Swinney, H. L. 1986. *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, *Physical Review A*, 33, 1134-1140. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.1134>

Kantz, H., Schreiber, T. 2003. *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511755798>

Kennel, M. B., Brown, R., Abarbanel, H. D. I., 1992. *Determining embedding dimension for*

*phase space reconstruction using a geometrical reconstruction*, Phys Rev A, 45/2, 3403-3411.  
<https://doi.org/10.1103/physreva.45.3403>

Lambertz, M., Vandenhouten, R. Grebe, R., Langhorst, P. 2000. *Phase transition in the common brainstem and related systems investigated by nonstationary time series analysis*, Journal of the Autonomic Nervous System 78, 141-157.  
[https://doi.org/10.1016/s01651838\(99\)00072-7](https://doi.org/10.1016/s01651838(99)00072-7)

Lorenz, H. W. 1993. *Nonlinear Dynamical Equation and Chaotic Economy*, Springer, Berlin.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-78324-1>

Mannattil, M., Pandey, A., Verma, M. K., Chakraborty, S. 2017. *On the applicability of low dimensional models for convective flow reversals at extreme Prandtl numbers*. Eur. Phys. J. B, 90, 259. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2017-80391-1>

Marwan, N., Romano, M.C., Thiel, M., Kurths, J. 2007 *Recurrence plots for the analysis of complex systems*, Physics Reports, 438, 237-329.<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.001>

Rawald, T., 2018. *Scalable and Efficient Analysis of Large High-Dimensional Data Sets in the Context of Recurrence Analysis*, PhD Thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 299 p.

Takens, F. 1981 *Detecting strange attractors in turbulence*. In D. A. Rand and L.-S. Young (ed.). *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, 898, Springer-Verlag, 366-381. <https://doi.org/10.1007/bfb0091924>

Zbilut, J. P., Webber, C. L. 1992. *Embedding and delays as derived from quantification of Recurrence Plot*, Phys Lett A, 171, 199-203. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90426-m](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90426-m)

Zbilut, J. P., Webber, C. L., Giuliani, A. 1998. *Detecting deterministic signals in exceptionally noisy environments using cross recurrence quantification*, Phys Lett A, 246, 122-128.  
[https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(98\)00457-5](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(98)00457-5)