Néhány szó a változás méréséről közgazdaságtanban

Kovács István Béla
főiskolai docens
BGE, PSZK
E-mail: kovacs.istvanbela@uni-bge.hu

DOI: 10.29180/978-615-6342-90-4_33

Összefoglalás: Áttekintjük a gazdasági matematika tantárgyban a változás mérésére szolgáló fogalmakat. Megfeleltetjük a gazdaságtanban és a matematikában használt elnevezéseket. Példákon át elemezzük az elaszticitás fogalmát, és a matematika tananyagon túl megvizsgáljuk az arányos, progresszív, illetve degresszív növekedés geometriai jelentését.

Kulcsszavak: határköltség, elaszticitás, proporcionális növekedés, progresszív és degresszív növekedés

Abstract: We survey the mathematical terms expressing the change of functions, and compare them with the terms used in economics. We reflect on elasticity, and, furthering the content of mathematics curriculum, we describe proportional, progressive and degressive growth and their geometry through examples.

Keywords: marginal cost, elasticity, proportional growth, progressive and degressive growth

1. A változás jellemzésére szolgáló alapvető fogalmak

Az egyszerű tárgyalás érdekében a gazdasági függvényünket költségfüggvénynek fogjuk nevezni. A változó a termék mennyisége. Föltesszük, hogy a költség függvény növekvő, azaz több termék előállítása nagyobb költséggel jár. Bár mind a termék mennyisége, mind a költség általában egész számokként jelenik meg, föltételezzük, hogy a költség függvény folytonos, sőt, ahol szükséges, differenciálható. Ha x jelöli a termelt mennyiséget, a költség függvény szokásos alakja $C(x) = C_0 + C_V(x)$,ahol $C_0 = C(0)$ az állandó költség, $C_V(x)$ pedig a változó költség. Feltevésünk szerint C konstans, C_V monoton növekvő függvények [3], [5].

1.1. Határköltség, átlagköltség

Ha a termelés x-ről y -ra változik, a növekedés mértéke C(y) – C(x). A közgazdaságtanban a *határköltség* a kibocsátás újabb egységének előállításához szükséges többletköltség [3]. Látjuk, hogy a határköltség az egy hosszú intervallumhoz tartozó növekedés mértéke.

A hányados $\frac{C(y)-C(x)}{y-x}$ az *átlagos növekedési ráta* az $[x,y]$ intervallumon [4]. A matematikában *differencia hányados*nak hívjuk. Rögzített x mellett y változóval differencia hányados függvénynek nevezzük [1], [2]. A közgazdaságtanban az *átlagköltség* az összköltség/kibocsátás [3], azaz $\frac{C(x)}{x}$, ami csak akkor felel meg a $[0,x]$ intervallumon értelmezett átlagos növekedési rátának, ha az állandó költséget 0-nak tekinthetjük.

Az x termelési szinthez tartozó *pillanatnyi növekedési ráta* a differencia hányados függvény, az átlagos növekedési ráta határértéke (ha létezik), midőn y tart az x-hez [4]:

$$C'(x)=\lim_{y\to x}\frac{C(y)-C(x)}{y-x} \tag{1}$$

Matematikában ezt a költség függvény x termeléshez tartozó *deriváltj*ának nevezzük. $C'(x)$ nem negatív, mivel a költség függvény szigorúan növekvő. Emlékezzünk, hogy a pillanatnyi növekedési ráta x-nél a költség függvény gráfja $(x,C(x))$-beli érintőjének a meredeksége. Bőséges szemléltető ábra anyag található [1] és [2]-ben.
Másként mondva, a termelés egy egységgel való növelése $C'(x)$ egységnyi növekedést vonna maga után, ha a növekedési ráta közben változatlan maradna.

Látjuk tehát, hogy sok féle fogalom használatos a változás mérésére. A hallgatóknak nehézséget jelenthet, hogy a különböző közgazdasági és matematikai iskolák gyakran más – más kifejezést használnak ugyan arra a fogalomra, sőt a marginális kifejezést néha határnak, néha határértéknek értelmezik. Az irodalom helyes értelmezéséhez tájékozottnak kellene lenni ezen fogalmak tekintetében.

2. Költség elaszticitás

Sajnos, a pillanatnyi növekedési ráta értéke függ a mértékegységtől, amivel a költséget, vagy a kibocsátást kifejezzük. Nézzük a következő példát: Tegyük fel, hogy a költség függvényünk

$$C(x) = 1000000 + 5x \tag{2}$$

ahol x a legyártott játékok száma, az állandó költség 1000000 USD hetente. $C'(x) = 5$ függetlenül a termelés nagyságától. Ha a költséget Euróban számítjuk, az árfolyam pedig 1 Euro = 1,6 USD (12 éve ez volt a helyzet), akkor az új költség függvény

$$C_{new}(x) = 1000000\frac{10}{16} + 5\frac{10}{16}x\,. \tag{3}$$

A marginális költség függvény most is konstans $C'_{new}(x) = \frac{50}{16} = 3.125$.

Szeretnénk egy olyan fogalmat a változás mértékének jellemzésére, ami független a mértékegységektől.

A költség elaszticitás x termelési szintnél a költség százalékos növekedését közelíti egy százalékos termelés növekedés esetén [5]. Amikor a termelés x-ről y-ra változik, a költség $\frac{C(y)-C(x)}{C(x)}$-szor 100 százalékkal, míg a termelés $\frac{y-x}{x}$-szor 100 százalékkal.

Ezeket a hányadosokat hasonlítjuk össze. Legyen

$$E_C(x) = \lim_{y\to x}\frac{\frac{C(y)-C(x)}{C(x)}}{\frac{y-x}{x}}\,. \tag{4}$$

$E_C(x)$ a költség elaszticitás $x$termelési szinten [2], [4]. Ha $C(x)$ differenciálható, akkor az $E_C(x)$-et definiáló határérték létezik, és teljesül

$$E_C(x) = C'(x)\frac{x}{C(x)}\,. \tag{5}$$

Látjuk, hogy $E_C(x)$ sem lehet negatív. Az elaszticitás már független a mértékegységektől hiszen USD/USD, darab/darab miatt nincs dimenziója.

A fenti példában a két különböző formula ugyan azt az elaszticitás függvényt adja:

$$E_C(x) = \frac{5x}{1000000 + 5x}, \tag{6}$$

míg
$$E_{C_{new}}(x) = \frac{5\frac{10}{16}x}{1000000\frac{10}{16} + 5\frac{10}{16}x} = \frac{5x}{1000000 + 5x}\ . \tag{7}$$

3. A proporcionális, progresszív és degresszív növekedés geometriája

3.1. Arányos, arány alatti és arány fölötti növekedés

Azt mondjuk, hogy x_0 termelésnél a költség növekedés

- arány alatti, vagy degresszív, ha $0 \le E_C(x_0) < 1$,
- arányos, vagy proporcionális, ha $E_C(x_0) = 1$ és
- arány feletti, vagy progresszív, ha $1 < E_C(x_0)$. [5]

Általában az érdekel minket, hogy hogyan változik a költség függvény egy adott intervallumon. Azt mondjuk, hogy a költség függvény növekedése progresszív az intervallumon, ha $1 < E_C(x_0)$ az intervallum minden pontjában. Nézzük a következő példákat!

a) Ha a költség függvény lineáris és nincs állandó költség, azaz $C(x) = ax$ valamely $0 < a$ számmal, akkor $E_C(x) = a\frac{x}{ax} = 1$ bármely termelési szintnél, azaz $C(x) = ax$ mindenütt proporcionálisan növekszik.

b) Ha a költség függvény lineáris, pozitív állandó költséggel, azaz $C(x) = C_0 + ax$, $0 < C_0, a$, akkor $0 \le E_C(x) = a\frac{x}{C_0 + ax} = \frac{ax}{C_0 + ax} < 1$. Teljesülnek továbbá:

- $E_C(0) = 0$,

- $E_C(x)$ növekszik, mivel deriváltja $\left(E_C(x)\right)' = \frac{aC_0}{\left(C_0 + ax\right)^2}$ pozitív,
- $\lim_{x\to\infty} E_C(x) = 1$.

Más szóval, az ilyen típusú költség függvény elaszticitása nullától egyig növekszik.

$C(x) = C_0 + ax$ növekedése arány alatti.

c) Egy exponenciális költség függvény $C(x) = C_0 e^{px}$, $0 < p$, progresszíven növekszik elég nagy termelésnél: $E_C(x) = pC_0 e^{px} \frac{x}{C_0 e^{px}} = px$, ezért $1 < E_C(x)$ ha $1 < px$, azaz $\frac{1}{p} < x$.

Konkrét számokkal: $C(x) = 1000 e^{\frac{1}{100}x}$, $p = \frac{1}{100}$ progresszíven növekszik 100 termelési szint fölött, és degresszíven 100 alatt.

d) Egy logaritmikus költség függvény $C(x) = \ln(e^c x) = c + \ln x$, $0 < x$,

$0 < c$ degresszív elég nagy termelésnél:

$$E_C(x) = \frac{1}{x}\frac{x}{c + \ln x} = \frac{1}{\ln(e^c x)} < 1 \tag{8}$$

ha $1 < \ln(e^c x)$. A feltétel teljesül, ha $e^{1-c} < x$. Konkrét számokkal legyen

$C(x) = 5 + \ln x$. Ebben az esetben $C(0)$ nincs definiálva. $C(x)$ degresszív, ha

x nagyobb mint $e^{-4} = \frac{1}{e^4}$, azaz gyakorlatilag mindenütt.

3.2 Konstans elaszticitás

Milyen költség függvényeknek konstans az elaszticitása? Tegyük föl, hogy $E_C(x) = p$ valamely p pozitív számmal. Az elaszticitás formulája szerint

$$E_C(x) = C'(x)\frac{x}{C(x)} = p. \tag{9}$$

Ez egy egyszerű differenciálegyenlet a hallgatók számára is hozzáférhető egyszerű megoldással. Alakítsuk át

$$\frac{C'(x)}{C(x)} = p\frac{1}{x} \tag{10}$$

formára és vegyük mindkét oldal primitív függvényét! $\ln C(x) = p \ln x + K$, ahol K tetszőleges konstans. Ekvivalensen $C(x) = e^{p \ln x + K} = e^K x^p$ .Jelölje az e^k konstanst C_0. Ekkor $C(x) = C_0 x^p$, $0 < x$, $0 < C_0$.

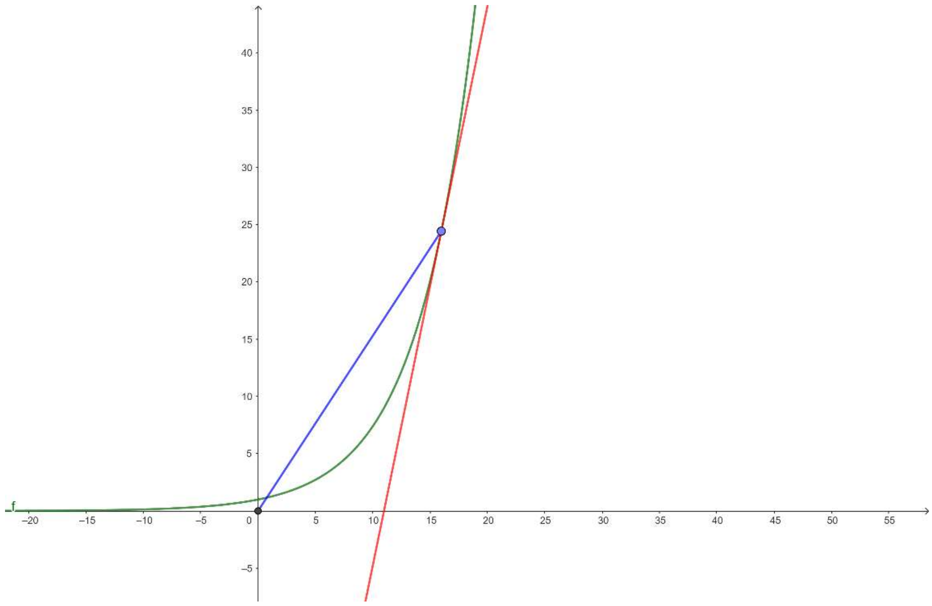
Eredményünk szerint egy költség függvény konstans p elaszticitású egy intervallumon pontosan akkor, ha konstansszorosa a p hatvány függvénynek az adott intervallumon. Speciálisan, a költség függvény pontosan akkor proporcionális növekedésű, ha $C(x) = C_0 x$ az intervallumon ($p = 1$ eset).

3.3 Az elaszticitás geometriája

A hallgatóink egy része fotografikus memóriájú, mások vizuálisan szeretik értelmezni a fogalmakat. Ezért, ha adott egy költség függvény gráfja, szeretnénk tudni ránézésre megmondani, hogy a növekedés progresszív-e adott x termelésnél.

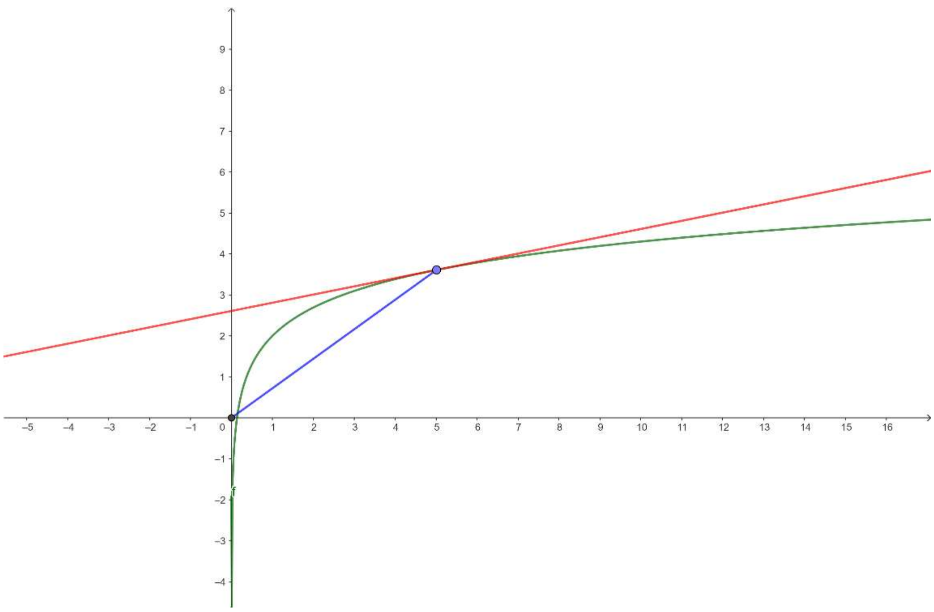
El kell döntenünk, hogy fönnáll-e $1 < C'(x)\frac{x}{C(x)}$, avagy teljesül-e $\frac{C(x)}{x} < C'(x)$? Egy felől a pillanatnyi növekedési ráta $C'(x)$ a $C(x)$ költség függvény gráfjához az$(x, C(x))$ pontban húzható érintő meredeksége. Más részről $\frac{C(x)}{x}$ annak az egyenesnek a meredeksége, ami az $(x, C(x))$ pontot összeköti az origóval (azaz az átlag költség). Ezt a két meredekséget kell összehasonlítanunk.

Ha az érintő $(x, C(x))$ -nél meredekebb, mint az $(x, C(x))$ vektor, akkor a költség progresszíven növekszik, mint az 1. ábra exponenciális függvénye estében. Zöld a függvény gráfja, piros az érintő, és a kék a szelő.



1. ábra

Ha a vektor meredekebb, akkor a növekedés degresszív, mint a 2. ábra logaritmikus függvénye esetében. Különben a növekedés lokálisan proporcionális.



2. ábra

Másképp is megfogalmazhatjuk ezt a kritériumot. Ha az érintő a Descartes féle koordináta rendszer függőleges tengelyét pozitív értéknél metszi, akkor az adott termelésnél a költség degresszíven növekszik. Ha az érintő az y tengelyt negatív értéknél metszi, akkor a költség lokálisan progresszíven, illetve, ha az érintő az origón megy át, akkor proporcionálisan növekszik.

4. Összefoglalva,

gördülékenyebbé teszi az órát, ha tisztázzuk a fogalmakat. Az elaszticitásra vonatkozó gondolatok pedig színesíthetik a tehetséggondozás anyagát.

Irodalomjegyzék

[1] Bódi E.: *Hogyan segíti a matematika a közgazdaságtan megértését*, PSZF jegyzet, 1996;

[2] Csernyák L.: *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006; ISBN 963 19 5895 8;

[3] Samuelson P. A.; Nordhaus W. D.; *Közgazdaságtan II. Mikroökonómia*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1990, ISBN 963 222 250 4;

[4] Sydsaeter K.; P. J. Hammond: *Mathematics for Economic Analysis*, Pearson Education, Inc., Delhi, 1995, ISBN 81 7758 104 X;

[5] Sztanó I.; Sutus I.; Szirmai A.; Korom E.: *A Vezetői Számvitel Alapismeretei,* BGF, PSZFK jegyzet, Budapest, 2000.