Nevezetes közepek közötti összefüggésekről szemléltetéssel

Dr. Molnár István[1], Borbola Gábor[2]
[1] főiskolai docens, [2] mesteroktató
[1] Budapesti Gazdasági Egyetem, Pénzügy és Számviteli Kar
[2] Gál Ferenc Egyetem, Egészség- és Szociális Tudományi Kar
[1] E-mail: molnar.istvan@uni-bge.hu, [2] borbola.gabor@gfe.hu

DOI: 10.29180/978-615-6342-90-4_20

Összefoglalás: A szerzők tanulmányukban a nevezetes közepek közötti összefüggéseket (az n = 2 esetben) tárgyalják szemléletes bizonyítások alkalmazásával.

Kulcsszavak: nevezetes közepek, tulajdonságok, szemléletes bizonyítás, Lehmer-közép

Abstract: In this study the authors dive into the connection of the means (in the n = 2 case) by using illustrative proofs.

Keywords: means, properties, proofs without words, Lehmer mean

1. Bevezetés

A nevezetes közepeknek nagyon sok fontos alkalmazási területük van, kitűnő lehetőségeket kínálnak a különféle témakörök előkészítésére (pl. szélsőérték-feladatok, statisztikai jellemzők stb.). A már meglévő ismereteinket felhasználva, célszerű tovább gyarapítani és színesíteni, mind a nevezetes közepek skáláját, mind pedig a geometriai szemléltetést is. Könnyen és „egyszerűen" tárgyalhatók a közepeknek (az $n=2$ esetben) az alábbiakban bemutatásra kerülő szemléletes (geometriai) megjelenítése.

Legyen $a, b \in R^{+}$, $a \leq b$. Ekkor a két szám

– harmonikus közepe $H(a,b)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

– mértani (geometriai) közepe $G(a,b)=\sqrt{ab}$

– számtani (aritmetikai) közepe $A(a,b)=\dfrac{a+b}{2}$

– négyzetes (kvadratikus) közepe $N(a,b)=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

– kontraharmonikus közepe $C(a,b)=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

2. Nevezetes közepek közötti összefüggések

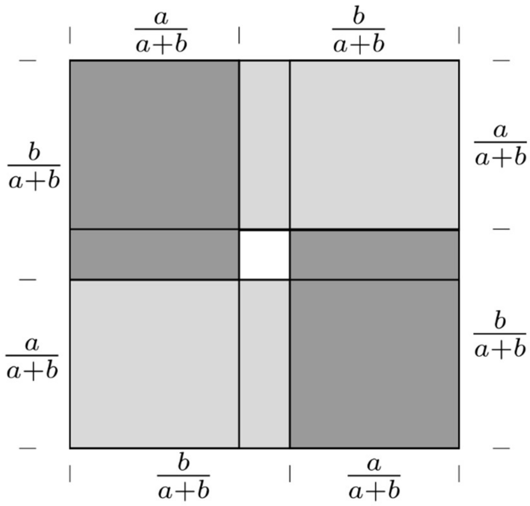
1. állítás

$$H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)\le N(a,b)\le C(a,b).$$

Bizonyítás

A bizonyítás során egy-egy (speciális) négyzet „feldarabolását” használjuk fel [1], [2].

a) Tekintsünk egy egységoldalú négyzetet, és daraboljuk fel az ábra szerint (1. ábra):



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

1. ábra

Ekkor $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b}=1$

A négyzet területe $\left(T=1^2\right)$ nagyobb vagy egyenlő, mint a négy besatírozott téglalap területének összege.

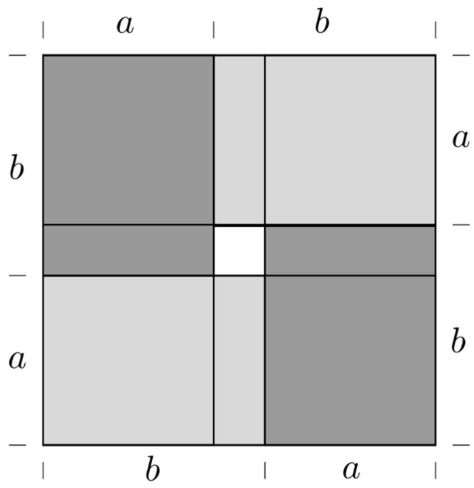
$$1^2 \geq 4 \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b}$$

$$1 \geq \frac{4ab}{(a+b)^2} \quad \Leftrightarrow \quad ab \geq \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Tehát $G(a,b) \geq H(a,b)$

b) Tekintsünk egy $a+b$ oldalú négyzetet, és daraboljuk fel az ábra szerint (2. ábra):



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

2. ábra

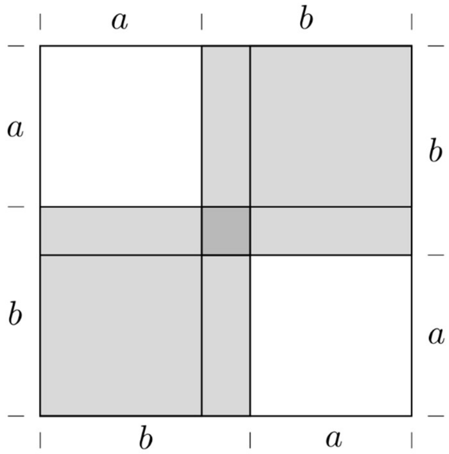
A négyzet területe $\left(T=(a+b)^2\right)$ nagyobb vagy egyenlő, mint a négy besatírozott téglalap területének összege.

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Tehát $A(a,b) \geq G(a,b)$

c) Tekintsünk egy $a+b$ oldalú négyzetet, és daraboljuk fel az ábra szerint (3. ábra):



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

3. ábra

A két-két *a*, illetve *b* oldalhosszúságú kis négyzetek területeinek (a^2 és b^2) összege nagyobb vagy egyenlő, mint az eredeti négyzet területe $\left(T=(a+b)^2\right)$.

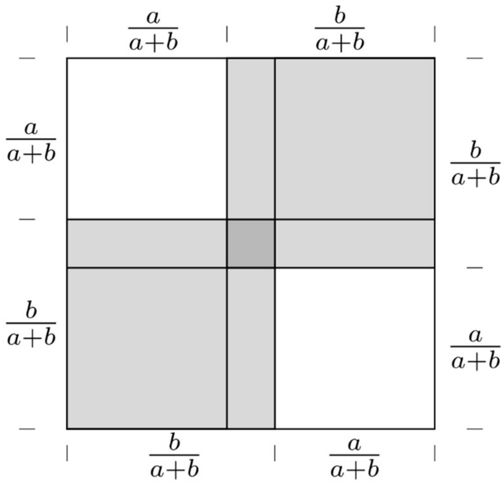
$$2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2$$

$$\frac{2a^2+2b^2}{4} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

Tehát $N(a,b) \geq A(a,b)$

d) Tekintsünk egy egységoldalú négyzetet, és daraboljuk fel az ábra szerint (4. ábra):



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

4. ábra

Ekkor $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1$

A két-két, $\frac{a}{a+b}$, illetve $\frac{b}{a+b}$ oldalhosszúságú kis négyzetek területeinek összege nagyobb vagy egyenlő, mint az eredeti négyzet területe $\left(T=1^2\right)$. Tehát

$$2\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+2\cdot\left(\frac{b}{a+b}\right)^2\geq 1^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\geq\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{(a+b)^2}\geq\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$. Tehát $C(a,b)\geq N(a,b)$

Könnyen belátható, hogy (mindegyik esetben) az egyenlőség akkor áll fenn, ha $a=b$.

(Az 1. állítás bizonyítása során négy, vizuálisan egymástól „alig eltérő” ábrát használtunk fel, és „csupán” egyes szakaszokhoz rendeltünk más-más értéket.)

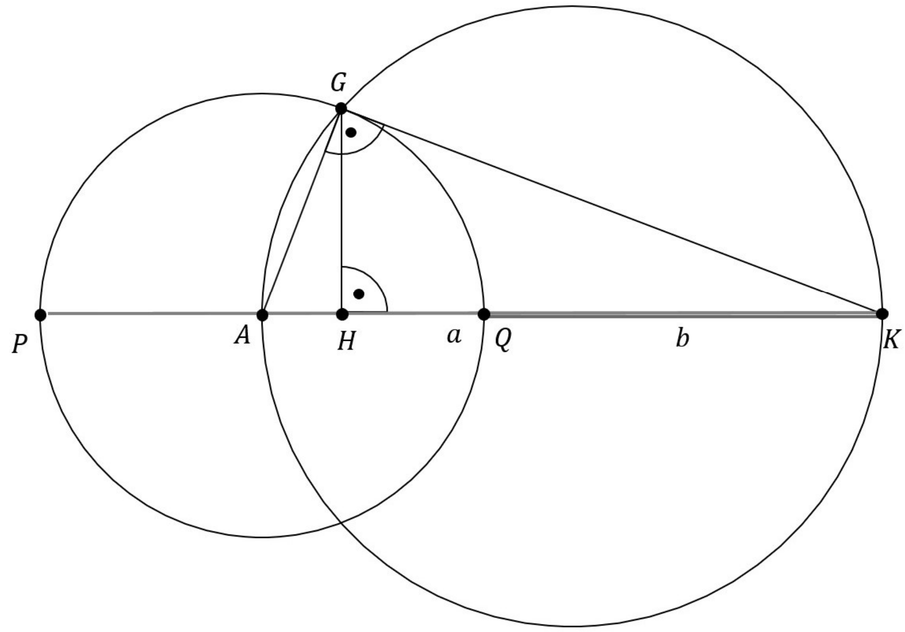
2. állítás

$$H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < N(a,b) < C(a,b), \text{ ha } a \neq b$$

Bizonyítás

Azt kell belátnunk, hogy $\dfrac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} < \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

Legyen $PK = a$, $QK = b$, ahol $b < a$. Legyen az A pont a PQ szakasz felezőpontja. A PQ szakasz Thalész-körének és az AK szakasz Thalész-körének (egyik) metszéspontja legyen a G pont, míg a G pontból a PK-ra állított merőleges talppontja a H pont. (5. ábra)



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

5. ábra

Mivel a PQ szakasz hossza $a-b$, ezért az AG és AQ szakasz (a PQ szakasz Thalész-körének sugarai) hossza $\dfrac{a-b}{2}$. Így az AK szakasz hossza $AK = AQ + QK = \dfrac{a-b}{2} + b = \dfrac{a+b}{2}$.

Az AGK derékszögű háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

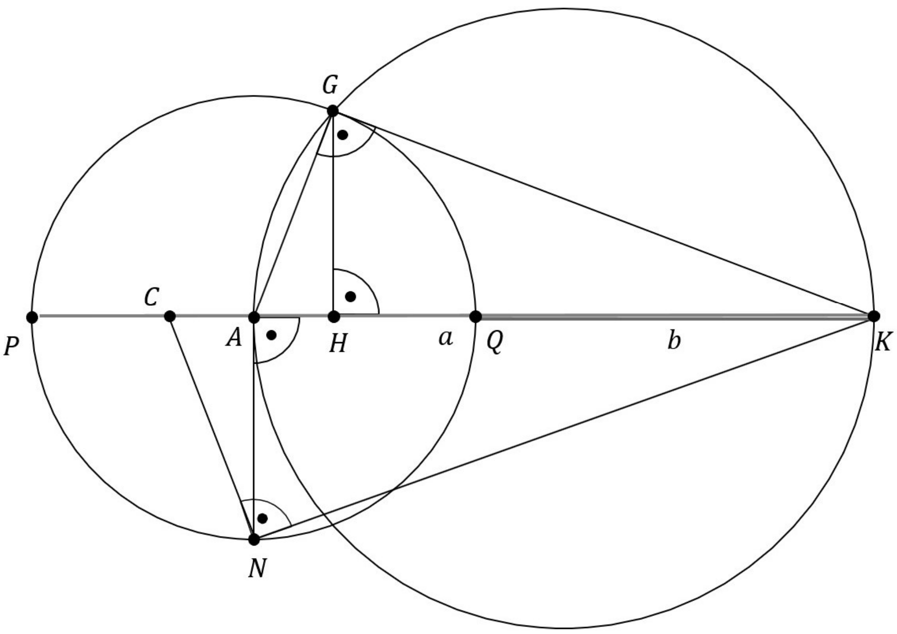
$GK^2 = AK^2 - AG^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{4ab}{4} = ab$, ahonnan $GK = \sqrt{ab}$

.

Az AGK derékszögű háromszögben alkalmazva a befogó tételt:

$GK^2 = HK \cdot AK$, ahonnan $HK = \frac{GK^2}{AK} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$.

PQ szakasz Thalész-körét a PK-ra A pontban állított merőleges N pontban metszi (a G és N pontok a PK egyeneshez viszonyítva különböző félsíkban vannak). Az NK-ra N pontban állított merőleges a PK-t C pontban metszi. (6. ábra)



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

6. ábra

Az AN szakasz ugyancsak a PQ szakasz Thalész-körének sugara, ezért hossza $\frac{a-b}{2}$.

Az *NAK* derékszögű háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

$$NK^2 = AK^2 + AN^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{2a^2+2b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2},$$ ahonnan

$$NK = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Az *CNK* derékszögű háromszögben alkalmazva a befogó tételt:

$NK^2 = AK \cdot CK$, ahonnan $$CK = \frac{NK^2}{AK} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Felhasználjuk azt a (közismert) tényt, hogy a derékszögű háromszög átfogója nagyobb, mint a (bármely) befogója. Így a *GHK* háromszögben a *HK* kisebb, mint a *GK*. Az *AGK* háromszögben a *GK* kisebb, mint az *AK*. Továbbá az *NAK* háromszögben az *AK* kisebb, mint az *NK*, illetve a *CNK* háromszögben az *NK* kisebb, mint a *CK*.

Mindezeket figyelembe véve, könnyen belátható, hogy

$HK < GK < AK < NK < CK$, azaz

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

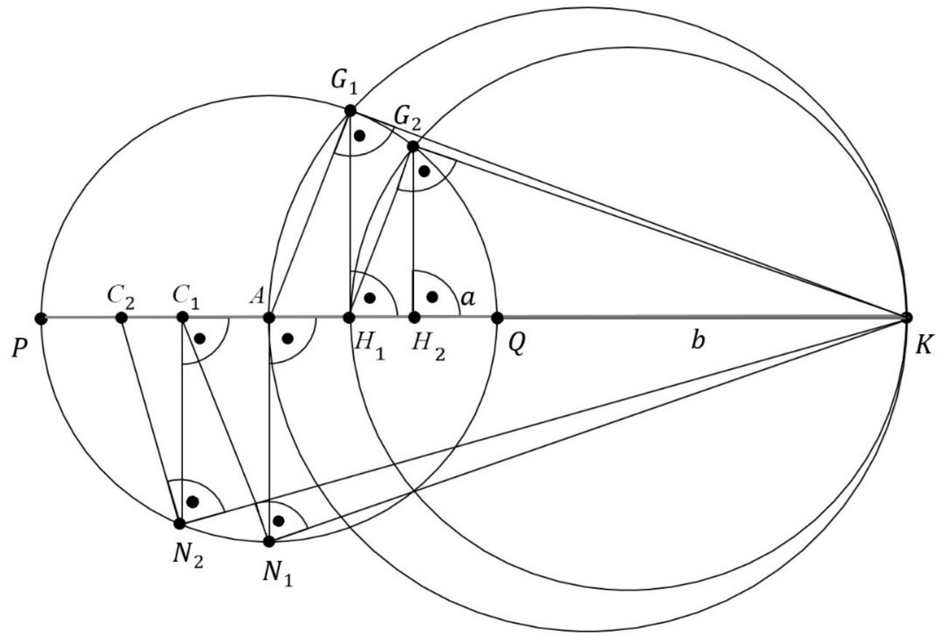
(Természetesen a szerkesztések során „megoldható”, hogy a *G* és *N* pontok a *PK* egyeneshez viszonyítva azonos félsíkba kerüljenek, de a „jobb áttekinthetőség” érdekében célszerű a fentiekben vázoltak alapján szemléltetni).

3. Lehmer-közép

Érdekes „megfigyelést” tehetünk, ha a szerkesztéseket „folytatjuk” a *PK* egyenes által meghatározott félsíkokban.

A „felső” félsíkban: a *PQ* szakasz Thalész-körének és az *AK* szakasz Thalész-körének (egyik) metszéspontját jelölje most a G_1 pont, míg a G_1 pontból a *PK*-ra állított merőleges talppontját pedig a H_1 pont. A *PQ* szakasz Thalész-körének és az H_1K szakasz Thalész-körének (egyik) metszéspontja a G_2 pont. A G_2 pontból a *PK*-ra állított merőleges talppontja a H_2 pont stb.

Az „alsó" félsíkban: *PQ* szakasz Thalész-körét a *PK*-ra *A* pontban állított merőleges N_1 pontban metszi. Az N_1K -ra N_1 pontban állított merőleges a *PK*-t C_1 pontban metszi. A *PQ* szakasz Thalész-körét a *PK*-ra C_1 pontban állított merőleges N_2 pontban metszi. Az N_2K -ra N_2 pontban állított merőleges a *PK*-t C_2 pontban metszi stb. (7. ábra)



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

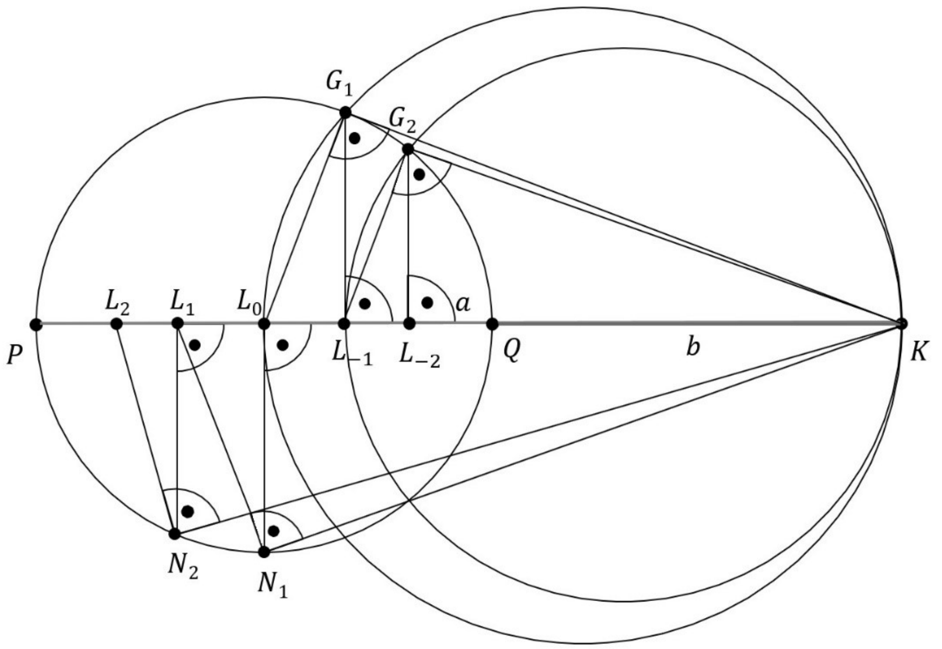
7. ábra

A 2. állítás bizonyításában leírtakhoz hasonló gondolatmenettel (a megfelelő derékszögű háromszögekben a Pitagorasz-tétel, illetve a befogó tétel alkalmazásával vagy koordinátageometriai eszközök felhasználásával), a következő eredményekhez jutunk:

$$H_1K = \frac{2ab}{a+b} = \frac{a^0+b^0}{a^{-1}+b^{-1}} \qquad H_2K = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} = \frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}+b^{-2}}$$

$$C_1K = \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a^1+b^1} \qquad C_2K = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$$

Figyelembe véve, hogy $AK = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a^1+b^1}{a^0+b^0}$, a kapott eredmények a két szám (*a* és *b*) Lehmer-közepének speciális (egész paraméterű) eseteit adják (ha *a* és *b* pozitív valós számok és *p* valós szám, akkor az *a* és *b* számok *p* paraméterű Lehmer-közepe $L_p(a,b) = \dfrac{a^{p+1}+b^{p+1}}{a^p+b^p}$). (8. ábra)



Forrás: [1] és [2] alapján saját szerkesztés

8. ábra

Bebizonyítható, hogy az előzőekben megismertek alapján a „megadott" szerkesztési „eljárás" segítségével általánosan is megadhatók (megszerkeszthetők) az *a* és *b* (pozitív valós) számok egész paraméterű Lehmer-közepei, éspedig

$$H_n K = L_{-n}(a,b) = \frac{a^{-n+1}+b^{-n+1}}{a^{-n}+b^{-n}} \qquad C_n K = L_n(a,b) = \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

$$(n \in N)$$

Összegzés

Ha egy matematikai problémára szép, szemléletes bizonyítást (is) lehet adni, akkor ezt a lehetőséget nem szabad elmulasztanunk. A szemléletességet általában eléggé fontosnak és alapvetőnek ismerik el a gondolkozással kapcsolatban. Ismert tény, hogy a konkrét példák, a gyakorlati tapasztalatok fontos szerepet játszanak mind a fogalmak kialakításában, mind pedig az ismeretek tartós rögzülésében. A megértés a fogalmi megragadás természetéből kifolyóan a lényegre irányul. Ha az ismereteket nem csupán verbálisan adjuk át, hanem a vizuális tapasztalatok megszerzésére is lehetőséget teremtünk, akkor a hallgatók egyfelől jobban megértik és megjegyzik az új ismereteket, másrészt pedig divergens gondolkodásra is „késztetjük őket” [3]. Mindezeket figyelembe véve, a megfelelő szemléltetések nem csak a megértésben, hanem az ismeretek rendszerezésében is sokat segíthetnek.

Egészen „különösnek” tűnhet, hogy a gondolkozásnak az elvonatkoztatásra vonatkozó „műveletét” a geometria keretein belül szeretnénk „megvalósítani”. Alaposabb megfontolás után azonban azt is be kell látnunk, hogy sok esetben a „geometriai állítások”, illetve a „dolgok geometrizálása” tulajdonképpen nem is más, mint egy végrehajtott, következetes elvonatkoztatás eredménye. Így pedig az elvonatkoztatás és a geometriai „leegyszerűsítés”, megszerkesztés között lényeges összefüggés van.

A tanulmányban – a nevezetes közepek példáján keresztül – igyekeztünk bemutatni a képi reprezentáció jelentőségét, szemléletes bizonyításokon keresztül (melyekhez kapcsolódóan természetesen szükségesek az egzakt formális levezetések is).

A közepekkel „való foglalkozás”, azért is fontos , mert számos „fontos és érdekes” alkalmazási terület adható meg. Néhány példa (a teljesség igénye nélkül): számtani és mértani közepekkel definiált sorozatok bizonyos elliptikus integrálokhoz konvergálnak, a közepekkel definiált sorozatok segítségével közelítések adhatók meg, például a logaritmus, a négyzetgyök, illetve a π értékére stb.

Irodalomjegyzék

[1] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Washington, 1993;

[2] Molnár I.: *Nevezetes közepekről szemléletesen (is)*, Matlap 2023/4, Kolozsvár, pp. 121-124;

[3] Makó Z., Téglási I.: *Indoklás és bizonyítás*, Educatio Kht., Hallgatói Információs Központ, 2011

[4] Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Volenec V.: *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989;

[5] Késedi Ferenc: *Egyenlőtlenségek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.