Hilbert-hotel átépítés – avagy egy érdekes feladatcsokor számosságok bevezető tanításához

Dr. Losonczi Attila[1], Dr. Bölcskei Attila[2], Dr. Talata István[3]
[1,2,3]Budapesti Gazdasági Egyetem, Külkereskedelmi Kar,
Társadalomtudományi Módszertan Tanszék
E-mail: losonczi.attila@uni-bge.hu, bolcskei.attila@uni-bge.hu, talata.istvan@uni-bge.hu

DOI: 10.29180/978-615-6342-90-4_12

Összefoglalás: Amikor a számosságok alapjait oktatjuk egyetemen, a Hilbert-hotel és a vele kapcsolatos feladatok érdekes és inspiráló színfoltot jelentenek mindig a hallgatóknak. Ezt szeretnénk kiegészíteni néhány saját gyártású új típusú feladattal, melyek a hotel trükkös átépítéseivel kapcsolatosak, és melyek megoldása tovább mélyítheti a hallgatók érdeklődését a téma iránt.

Kulcsszavak: matematika, halmazelmélet, számosságok, oktatás

Abstract: When teaching the bases of cardinalities at university, Hilbert-hotel and related exercises always mean an interesting and inspiring movement for students. Now we are going to extend those with some self-made exercises which related to the reconstruction of hotel, and by solving them, it can deepen the interest of the students on the subject.

Keywords: mathematics, set theory, cardinalities, teaching

1. Bevezetés

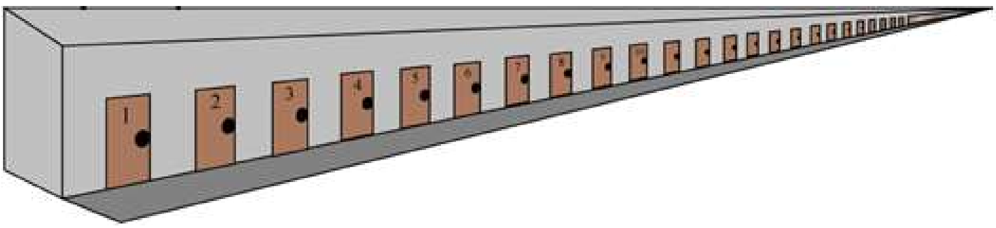
Az 1900-ban megrendezett nemzetközi matematikai konferencián plenáris előadásában David Hilbert a következőt mondta: „*Senki sem űzhet ki bennünket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett számunkra*”. Erre jó oka volt. Ugyanis a kb. 25 évvel korábban George Cantor által alapított halmazelméletet nagyon sok támadás érte. Sokan száműzni akarták a halmazelméletet a matematikából, sőt még a gondolatától is irtóztak a halmazelméleti gondolkodásmódnak és mind attól, amit a halmazelmélet újat hozott a matematikába.

Itt természetesen halmazelméleten nem azt értjük, amit általános/középiskolában szoktak. Meglepő módon, amit ott halmazelméleten értenek Cantor vizsgálatainak melléktermékeként keletkezett, sőt korábban is létezett már, habár messze nem ennyire letisztult formában, formalizmusban, mint Cantornál. Cantor egy nagyon újszerű mérést vezetett be (végtelen) halmazok méretének mérésére, összehasonlítására. Ez a mérés meglepő dolgokat mutatott végtelen halmazokra, olyanokat is, melyek jelentősen ellentmondani látszottak az intuíciónak, korábbi elképzeléseknek. Pl. kiderült,

hogy ez alapján a mérés alapján vannak különböző végtelenek, aztán előfordulhat, hogy a rész ugyanakkora, mint az egész, pl. egy rövid szakaszon ugyanannyi pont van, mint egy hosszabbon, sőt az egész egyenesen. Vagy van olyan halmaz, aminek 0 a hossza, de annyi pont van rajta, mint a számegyenesen. Cantor kortásainak jó része ezek miatt sem tudta elfogadni az aktuális végtelen fogalmát és a vele járó furcsaságokat.
Nem kis részben emiatt alkotta meg Hilbert a róla elnevezett hotelt, ily módon is népszerűsíteni akarván Cantor különleges gondolatait.

1.1. A Hilbert-hotel

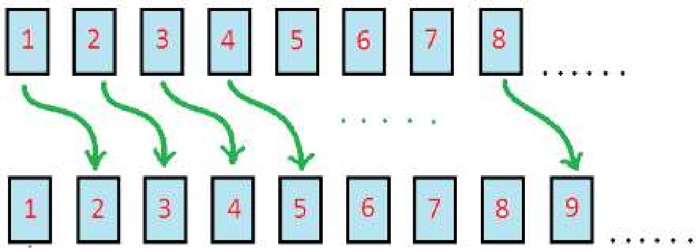
Cikkünk témája nem a Hilbert hotellel kapcsolatos alapfeladatok, de a jobb érthetőség kedvéért röviden ismertetjük a legfontosabbakat. Ebben a bevezető részben csak nagyon vázlatosan indokolunk meg mindent, részletesebb bizonyítások [1]-ben, illetve [2]-ben találhatók.
Először is mi a Hilbert-hotel: Egy végtelen szálloda. Konkrétan egy olyan szálloda, melynek szobái a természetes számokkal vannak megszámozva, vagyis minden természetes számnak megfelel egy szoba. Megjegyezzük, hogy az itt felmerülő számosságot megszámlálhatóan végtelen számosságnak hívjuk.



forrás: https://slideplayer.com/slide/13345755/

Az alap kérdések azzal kapcsolatosak, hogy egy teltházas ilyen szállodába hány új vendéget lehet még elhelyezni, mert elsőre meglepő módon lehet, sőt egészen „sokat” is.
Innentől feltételezzük, hogy a szálloda minden szobájában van vendég.

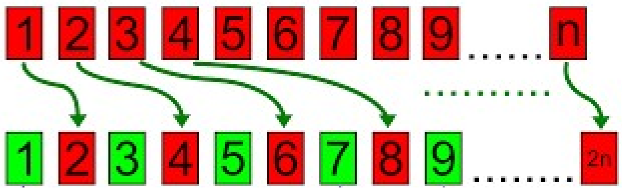
- Egyetlen új vendég érkezik. Őt úgy lehet elhelyezni például, ha először minden vendéget kiköltöztetünk a szobájából, majd pedig mindenkit vissza, de eggyel nagyobb sorszámú szobába, mint ahol eredetileg volt. Így felszabadul az 1-es szoba és minden korábbi vendégnek is lesz helye.



forrás: https://intuitivescienceblog.wordpress.com/2017/03/10/hilberts-paradox-of-grand-hotel/

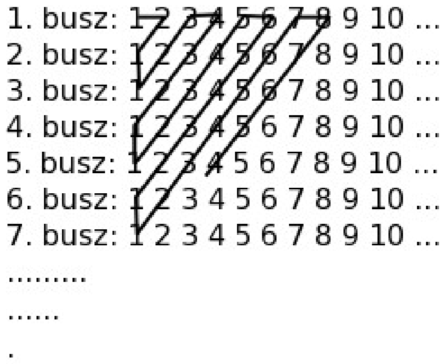
- Egy millió új vendég érkezik. Az előző módszert követjük azzal a különbséggel, hogy a korábbi lakókat az egy millióval nagyobb sorszámú szobába költöztetjük, mint ahol eredetileg voltak.

- Végtelen sok új vendég érkezik, annyi ahány természetes szám van. Itt megoldás lehet az, hogy minden vendéget kiköltöztetünk a szobájából, majd pedig mindenkit vissza, de kétszer nagyobb sorszámú szobába, mint ahol eredetileg volt. Így felszabadul minden páratlan sorszámú szoba és oda az újonnan érkezett vendégeket elhelyezhetjük.



forrás: https://intuitivescienceblog.wordpress.com/2017/03/10/hilberts-paradox-of-grand-hotel/

- Végtelen sok busz érkezik, mindegyikben végtelen sok új vendéggel. Mind a buszok, mind az egyes buszokon belül az utasok a természetes számokkal vannak megindexelve. Itt például a Cantor-tól származó átlós eljárás vezethet célra, melyet mellékelünk.



forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Hilbert_Grand_Hotel-paradoxonja

- Annyi új vendég érkezik, ahány pont a [0,1] szakaszon van. Azt is mondhatnánk, hogy minden új vendégnek van egy sorszáma, de ez nem (pozitív) egész szám, hanem egy [0,1] intervallumbeli érték. Itt be lehet látni, hogy ennyi vendéget már nem lehet elhelyezni egy üres szállodában sem. Ez nem azt jelenti, hogy eddig az emberiségnek nem sikerült ezt megoldani, hanem hogy egzakt bizonyításunk van arra, hogy ez lehetetlen, soha senkinek sem fog sikerülni.
  Vázlatosan: Cantor eredeti bizonyítása indirekt megy és a számok tizedes tört felírását használja. Megjegyezzük, hogy az itt felmerülő számosságot kontinuum számosságnak hívjuk.

A hallgatók ezen példákat látva gyakorta „panaszkodnak” arról, hogy „*ez ellentmond a józan észnek*”, hogy „*folyamatosan azt érzem, hogy ez nem lehet igaz*”. Itt fontos lehet megnyugtatni a hallgatókat, hogy az érzéseik teljesen rendben vannak. Viszont azért érzik, amit éreznek, mert ők (mint mindenki) véges halmazokon „szocializálódott”, vagyis véges halmazokon, véges szállodákon vannak csak tapasztalataik. Ez viszont nem ilyen, ezért nem várhatjuk, hogy pontosan úgy működjön és nem is úgy működik.

2. Hilbert-hotel átépítés verziói – A feladatok

A következő típusú kérdéseket vizsgáljuk. A Hilbert-hotelt különböző módokon átépítjük, pontosabban bővítjük és azt kérdezzük, hogy mely esetekben kapunk nagyobb hotelt az eredetinél. A vizsgált esetek a következők:

1. Az 1-es szoba helyére egy komplett Hilbert-hotelt építünk.
2. Bármely két szoba közé építünk egy új szobát.
3. Bármely két szoba közé építünk egy komplett Hilbert-hotelt.

4. A sík minden pozitív egész koordinátájú pontjába (is) teszünk egy szobát.
5. A 2-es lépést végtelen sokáig folytatjuk.
6. A 3-as lépést végtelen sokáig folytatjuk.
7. A 4-es lépést végtelen sokáig folytatjuk (a dimenziót növelve).
8. Egy végtelen dimenziós tér minden pozitív egész koordinátájú pontjába teszünk egy szobát (végtelen sok koordinátás vektorral írható le egy szoba „száma", melynek értékei pozitív egészek).

Két megjegyzés az 5-ös, 6-os, 7-es feladatokhoz:

- Úgy értve a végtelen sokáig folytatást, hogy minden másodpercben egyszer végrehajtjuk a 2-es (3-as, 4-es) lépést és ezt végtelen sok másodpercig folytatjuk.
- Miután egy szoba megépült, már nem bántjuk! Erre azért fontos felhívni a figyelmet, mert könnyen úgy tűnhet, mintha ezekben a feladatokban folyamatosan változna a szoba állomány, nem is lennének stabil szobák. De ez nem így van, minden lépésben új szobák jönnek létre, a korábbiakhoz nem kell „nyúlunk".

Azonnal felmerül a kérdés, hogy hogy értjük a nagyobbat. Mitől nagyobb egy végtelen hotel egy másik végtelen hotelnál? Legegyszerűbb módon gondolhatunk a vendégek átköltöztethetőségére, vagyis azt mondjuk, hogy egy **H hotel nagyobb, mint egy K hotel**, ha egy teli K hotel minden vendége elhelyezhető az (üres) H hotelbe, de fordítva nem, avagy egy teli H hotel összes lakója *bizonyíthatóan* nem helyezhető el semmilyen módon egy (üres) K hotelbe.

Akkor most vizsgáljuk meg az eseteket külön-külön, hogy mikor kapunk nagyobb hotelt az eredeti Hilbert-hotelnél.

1. Az 1-es szoba helyére egy komplett Hilbert-hotelt építünk.
   Könnyen látható módon ennek az új hotelnek annyi szobája lesz, mint ahány egész szám van. Vagy gondolhatunk úgy is rá, hogy ez 2 Hilbert-hotel (diszjunkt) uniója, az egyik az új részleg, a másik a régi szobái 2-től kezdődően. Két Hilbert-hotel pedig pont akkora, mint egy, ahogy korábban már láttuk abban az esetben, amikor egy busznyi új vendég érkezett egy teltházas hotelbe.
2. Bármely két szoba közé építünk egy új szobát.
   Így sem kapunk nagyobbat, mert a szobákat sorozatba tudjuk rendezni: új szoba, régi szoba, új szoba, régi szoba stb. alapján, így az új vendégeit könnyedén elhelyezhetjük a régibe.
3. Bármely két szoba közé építünk egy komplett Hilbert-hotelt.

Ez az eset megfeleltethető annak a korábbinak, amikor végtelen sok busz utasait igyekeztünk elhelyezni. Konkrétan mindegyik új részleg (két régi szoba közötti) felfogható, mint egy „busz”.

4. Ha a sík minden pozitív egész koordinátájú pontjába (is) teszünk egy szobát.
   Ez is felfoghatú úgy, mint amikor végtelen sok busznyi vendég érkezett, vagyis nem kapunk így sem nagyobbat. Azok az új szobák, melyek második koordinátája n, azonosítható az n. busszal.
5. A 2-es lépést végtelen sokáig folytatjuk.
   Ahogy a 2-es feladatnál már beláttuk, ez minden lépésben „csak” Hilbert-hotelnyi új szobát gyárt. Így ismét visszavezethetjük ezt az esetet is a végtelen sok busszal érkező vendégek esetére.
6. A 3-as lépést végtelen sokáig folytatjuk.
   Minden lépésben természetes számnyi „szoba-köz” lesz és mindegyikbe szintén természetes számnyi új szobát teszünk, vagyis minden lépésben „csak” Hilbert-hotelnyi új szoba keletkezik. Természetes számnyi lépés van, így az össz szobaszám sem nő meg, pont annyi lesz, mint egy eredeti Hilbert-hotelban.
7. A 4-es lépést végtelen sokáig folytatjuk (a dimenziót növelve).
   Amikor n dimenzióról lépünk $n+1$ dimenzióra, akkor az utolsó (új) koordináta értékei alapján végtelen sok csoportba sorolhatjuk az ebben a lépésben keletkezett szobákat. De mindegyik csoport akkora, mint a korábbi lépésben kapott, vagyis teljes indukcióval látható, hogy minden n-re „csak” Hilbert-hotelnyi új szobát képzünk. Mivel természetes számnyi n van, ezért az össz szobaszám is Hilbert-hotelnyi lesz.
8. Egy végtelen dimenziós tér minden pozitív egész koordinátájú pontjába teszünk egy szobát (végtelen sok koordinátás vektorral írható le egy szoba „száma”).
   Ebben az esetben végre nagyobb szállodát kapunk. Sőt, azt fogjuk belátni, hogy ha csak 1-et és 2-őt használunk koordinátaérték gyanánt (csak 2 értéket végtelen sok helyett!), akkor is nagyobbat kapunk. Ebből aztán meg pláne következni fog majd, hogyha az összes értéket használnánk, az a szálloda nagyobb lenne az eredetinél.
   Először is lássuk be, hogy ebbe az új szállodába beköltöztethetők a Hilbert-hotel vendégei. Vegyük egyszerűen azokat a szobákat, melyek koordinátái közt csak egyetlen 2-es van a többi mind 1-es. A Hilbert-hotel n. vendégét költöztessük abba a szobába, aminél az n. helyen van 2-es.
   Az, hogy a költöztetés visszafelé nem lehetséges, visszavezetjük arra a korábbi esetre, hogy a Hilbert-hotelbe nem helyezhető el annyi vendég, mint ahány pont a [0,1] szakaszon van. Csináljuk azt, hogy az 1-et kicseréljük 0-ra, a 2-őt pedig 1-re. Így most egy szoba „sorszáma” egy 0-

kból és 1-esekből álló sorozat lesz és minden szobához különböző ilyen sorozat tartozik. Egy szoba ezen kódja elé írjunk egy 0-át és egy vesszőt. Íly módon a kapott dolgot felfoghatjuk, mint egy tizedes törtet. De nem mint 10-es számrendszerbelit tekintsük, hanem 2-es számrendszerbelit, mely természetes módon meghatároz egy számot a [0,1] intervallumban. Így minden szobához hozzárendeltünk egy [0,1] intervallumon belüli számot. Sőt, minden [0,1] intervallumon belüli számhoz létezik egy szoba, ami pont oda rendelődik. Így legalább annyi szoba van, mint [0,1] intervallumon belüli szám. (A 2-es számrendszerbeli tizedestört felírás nem egyértelmű volta miatt lesznek szobák, amik ugyanoda képződnek, de belátható, hogy ez a számosságon nem változtat. Ebbe nem megyünk bele, mert nincs rá szükség a feladat megoldásához.)

Konklúzió: nem is olyan könnyű nagyobb hotelt kapni átépítéssel.

+1 kérdés/feladat: A 7-es és a 8-as feladat miért nem ugyanazt az eredményt adja? Mert látszólag ugyanazok.
Ennek az az oka, hogy a 7-esben minden lépésben csak véges sok koordináta nem 0, az összes többi 0. Azt is mondhatnánk, hogy azon vektorok együttesen, melyeknek minden koordinátája pozitív egész szám, de csak véges sok nem 0 van, annyian vannak csak, mint ahány szoba a Hilbert-hotelban van. Ellenben, ha az utóbbi kikötést elejtjük, akkor nagyobb halmazt kapunk, melynek elemeit már nem lehet elhelyezni a Hilbert-hotelben.

3. Összegzés

Azt gondoljuk, hogy az itt ismertetett feladatok tovább mélyíthetik a hallgatók érdeklődését a végtelen számosságok iránt, csökkenthetik idegenkedésüket az ezen a területen gyakori furcsaságokkal szemben, illetve kedvet kaphatnak további elmélyülésre a témában.

Irodalomjegyzék

[1] Péter Rózsa: *Játék a végtelennel*, Typotex, 2013; https://doi.org/10.2307/2267816

[2] N. Ya. Vilenkin: *In Search of Infinity*, Birkhäuser, 1995; https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0837-2