

## A gazdaság és matematika egyik találkozási pontja: az elaszticitás - a fogalom értelmezése a hallgatók körében

Várady Ferenc<sup>1,2</sup>, Végh Ágnes<sup>1,2</sup>, Szabó Csaba<sup>2,3</sup>, Mészárosné Boruzs Livia<sup>1</sup>

<sup>1</sup> adjunktus, <sup>2</sup> egyetemi docens, <sup>3</sup> egyetemi tanár, <sup>4</sup> mestertanár

<sup>1</sup>BGE KVIK Üzleti Elemzés Módszertan Tanszék

<sup>2</sup>MTA-ELTE Matematika Tanulásméleti Kutatócsoport

<sup>3</sup>ELTE Eötvös Loránd Tudományegyetem

E-mail: [varady.ferenc@uni-bge.hu](mailto:varady.ferenc@uni-bge.hu); [vegh.agnes@uni-bge.hu](mailto:vegh.agnes@uni-bge.hu);

[csaba@cs.elte.hu](mailto:csaba@cs.elte.hu); [meszarosne.boruzslivia@uni-bge.hu](mailto:meszarosne.boruzslivia@uni-bge.hu)

DOI: [10.29180/978-615-6342-61-4\\_7](https://doi.org/10.29180/978-615-6342-61-4_7)

**Összefoglalás:** A BGE KVIK karán elvégzett kutatásunkban azt vizsgáljuk, hogy a Gazdasági Matematika tárgy keretein belül tanult, nem matematikai fogalmakat milyen mélységben sajátítják el hallgatóink. Ebben a kísérletben az elaszticitással foglalkoztunk. A gazdasági képzés több más intézményében a gazdasági matematika tárgy óráin, és számonkérésekor a tisztán matematikai kérdések mellett gazdasági alkalmazások is szerepelnek. Ezek általában szöveges feladatok, és a dolgozatok utolsó kérdései közt vannak. Tanulmányunkban a kísérletek tapasztalatairól és eredményeiről számolunk be.

**Kulcsszavak:** elaszticitás fogalma, fogalom értelmezés, gazdasági alkalmazás, számonkérés

**Abstract:** In our research at BBS FCMT, we examine the depth to which non-mathematical concepts learned within the framework of the business mathematics subject is mastered by our students, focusing on elasticity. In several other institutions of business studies, in addition to purely mathematical questions, economic applications are included in the business mathematics subject classes and exams. These are usually text tasks, among the last questions of the tests. In our study, we report on the experiences and results of the experiments, developed based on previous experiences.

**Keywords:** concept of elasticity, concept interpretation, economic application, testing

### 1. Bevezetés

A gazdasági felsőoktatás alapozó módszertani tantárgyai között szerepelnek matematikai típusú tantárgyak. Ezek között leggyakrabban az analízis alapelemei fordulnak elő, úgymint a határérték fogalma, az egy- és többváltozós differenciálszámítás. A matematika tanulása ugyanakkor nem öncélú. Segítségét nyújt a gazdasági folyamatok megértésénél, elemzésénél, előrejelzések készítésénél. A differenciálhányados függvény egyik fontos felhasználása a vizsgált gazdasági függvény függvényértékének pontbeli relatív megváltozásának közelítő meghatározása [10], [13]. Ezt a közgazdaságtanban elaszticitásnak, rugalmasságnak nevezzük.

Az Oktatási Hivatal [11] kimutatása szerint 2021-ben a hallgatók 55,7%-a tanul olyan szakokon Magyarországon, ahol közvetlenül találkozik felsőfokú matematikaoktatással. Ebbe nincsenek azok a szakok beleszámolva, ahol csak rövid ideig, áttételesen jelenik meg a matematika, adott esetben különböző

statisztikai tantárgyak keretében, pl. biometria. Ugyanakkor a matematikát emelt szinten teljesítők aránya csekélynek nevezhető. 2022 májusában ez az OH adatai szerint csupán 6,8% volt [12]. Hasonló, vagy ennél gyengébb arányokat tapasztalunk mi is a bejövő elsőéveseknél. Így a hallgatók két szempontból is nehéz helyzetbe kerülnek: a gazdasági matematika órákon kell a differenciálhányados függvény fogalmát rövid idő alatt megérteniük, és a számolási technikáját elsajátítaniuk. Az emelt szintű érettségire való felkészülés során mindezt már a középiskolában megtanulhatták volna, a szemináriumon elég lett volna a tudásukat elmélyíteniük. A másik szempont, hogy a deriválást gazdasági környezetben is tudniuk kell használni és értelmezni. Az előző évek tapasztalati alapján a hallgatók többségének mindkét feladat nehéznek bizonyul, de különösen a gazdasági probléma megértése, megoldása, illetve értelmezése.

## 2. Elméleti háttér

A középiskolai és egyetemi matematika közötti nagy távolság áthidalása problémát jelent sok hallgató számára, ahogyan erre több kutatás is rámutat [1], [7], [8]. Számítalan tanulmány bizonyítja, milyen nehéz megérteni a derivált fogalmát. A kutatók rámutattak, hogy a hallgatók gyakran nem ismerik a differenciálhányados különböző jelentését, illetve nem értik a jelentések közötti összefüggéseket [6], [8], [16]. Ezen felül a differenciálhányados különböző, algebrai, geometriai és a gazdasági folyamatokkal kapcsolatos értelmezései között nem találják a kapcsolatot [5], [9]. Ezt a megállapítást annak ellenére tették a kutatók, hogy a „német” Curriculumban és érettségi rendszerben a deriválás egy kötelező elem, ellentétben a magyar Nemzeti Alaptantervvel.

Két német kutató egy átfogó exploratív kutatás keretében azt vizsgálta, mennyire helyesen használják a hallgatók a határfüggvény fogalmát, és számolják ki értékét [4]. Megállapították, hogy sok hallgató nem érti megfelelően a matematikai és közgazdaságtani fogalmakat a kurzus elvégzése után, különös tekintettel ez utóbbira. Részletes elemzésükben két dologra koncentráltak: mennyire helyesen használják a hallgatók a matematikai ismereteiket, valamint arra, hogyan tudják gazdaságilag interpretálni a kapott számszerű eredményt. Ebben az összefüggésben azt találták, hogy a matematikailag teljesen helyes megoldások aránya 52,3% lett (N=821). A gazdasági kérdésre adott válasz esetében az értelmezést ún. itemekre osztották, és a részletes elemzés során azt találták, hogy a hallgatók hasonló arányban (54,9%) válaszoltak teljesen helyesen, mint a matematikai számítás esetén. Egyéb esetekben vagy részben hiányos, illetve helytelen volt az értelmezés (30,1%), vagy teljesen hiányzott (15%).

Tanulmányunkban és az oktatás során az elaszticitás fogalmára az egyetem által használt definíciót és értelmezést használjuk [2]. A jegyzet nem tartalmaz külön jelölést az elaszticitás függvényre, de megadja a közgazdaságtani értelmezését. Hasonlóan tárgyalja az elaszticitás fogalmát Dietz is a tankönyvében [3], itt azonban több példa is található, jóllehet a vizuális reprezentációs sík itt sem jelenik meg. Azonban ez a tankönyv tartalmazza a legfontosabb elemi függvények elaszticitásfüggvényeit valamint számolási szabályokat az elaszticitással. Sydsæter és Hammond [14] motivációs bevezetéssel kezdi el az elaszticitás fogalmának tárgyalását. Ebben a kávé

árának és keresletének összefüggését vizsgálják, ebből vezetik le a [2] könyvben is megtalálható definíciót. A tankönyv sok és változatos alkalmazást kínál az elaszticitásra.

### 3. A kutatás, kutatási hipotézisek

A kísérlet a 2021/22-es tanév tavaszi, valamint a 2022/23-as tanév őszi szorgalmi időszakában zajlott. A kutatást a BGE KVIK első- és másodéves hallgatói körében végeztük Gazdasági Matematika tantárgyból. Az oktatás mindkét félévben online zajlott. A tavaszi félévben 4 előadás és 22 gyakorlati csoport szerepelt. Az előadásokat 2, a szemináriumokat 5 oktató tartotta. Valamennyien gyakorlott, a tantárgyat több fél év óta tanító kollégák voltak. Az előadókat B és C, a szemináriumvezetőket A, B, C, D, E betűk jelölik. Az azonos betűk azonos oktatókat jelentenek. Összesen 664 hallgató vette fel a tantárgyat, közülük 558-an írták meg az első zárthelyit a következő összetételben:

| Előadások/Oktatók | A         | B         | C         | D          | E          | Összesen   |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| 1. C              | 5         | 10        | 16        | 56         | 91         | <b>178</b> |
| 2. C              | 2         | 14        | 20        | 64         | 84         | <b>184</b> |
| 3. B              | 18        | 17        | 13        | 65         | 62         | <b>175</b> |
| 4. B              | 11        | 7         | 5         | 9          | 19         | <b>51</b>  |
| <b>Összesen</b>   | <b>36</b> | <b>48</b> | <b>54</b> | <b>194</b> | <b>256</b> | <b>588</b> |

1. táblázat

A létszámok eloszlása az előadások és gyakorlatok között  
(2021/22 tavasz)

*Forrás: saját szerkesztés*

A szemináriumok azonos feladatsorokkal, azonos módszerekkel kerültek megtartásra, a zárthelyi eredményében tanárhatás nem volt kimutatható. Az előadásokon az oktatók azonos tananyagból dolgoztak. Az elaszticitás megértésének mérése a következőképpen történt: 1. A **kettes** sorszámú előadás végén a hallgatók rövid, 2 pontos Coospace tesztet írtak az adott előadás anyagából. Ez a csoport volt a tesztcsoport, a többi a kontrollcsoport. 2. Minden vizsgált hallgató megírta az 1. zárthelyi dolgozatot, melynek utolsó, gazdasági jellegű feladatának a végén egy gazdasági függvény pontbeli elaszticitását kellett kiszámolniuk, és értelmezniük. 3. A kettes sorszámú előadáson 2 héttel később, egy kiszámolt elaszticitás értéket kellett a hallgatóknak értelmezniük. A kapott eredmények tükrében a következő félévben induló speciális kurzusban a kísérletet részben újra terveztük és lebonyolítottuk. Ebben a félévben 150 hallgató vette fel a tantárgyat, közülük 133 az előző félévben is, a többi hallgató valamelyik korábbi félévben. Az előadás végén írt 1. illetve 3. tesztet 61 ill. 55 hallgató, a köztük lévő 1. nagy zárt helyi dolgozatot 120 hallgató írta meg. A zárthelyi dolgozatban az előző félév tapasztalata alapján figyeltünk arra, hogy az elaszticitásra vonatkozó kérdés ne a gazdasági feladat utolsó részeként jelenjen meg, hanem önálló feladatként a zárthelyi közben. Emellett a kérdésfeltevés során nem a komplex számolásra helyeztük a hangsúlyt, hanem egy értelmezést, valamint egy egyszerű deriváláson alapuló számolást és értelmezést kértünk számon. A vizsgált félévben egy online előadás került

meghirdetésre, melyet jellemzően 30 hallgató látogatott, az előadás végi teszteket 50-70 hallgató töltötte ki. Az oktatás az előző félévhez hasonlóan zajlott, azzal a különbséggel, hogy a tesztcsoportban az oktató különösen figyelt az elaszticitás fogalmának megértésére. A másik 5 csoportban a szemináriumi oktatás megfelelt az előző félévnek.

A kutatással kapcsolatban két hipotézist vizsgáltunk:

1. A hallgatók nem sajátítják el megfelelően az elaszticitás fogalmát a félév során.
2. A gazdasági jelenségek akár számításoktól független alaposabb körüljárása pozitívan befolyásolja a hallgatói megértés folyamatát.

#### 4. Eredmények

Az egyváltozós gazdasági alkalmazások után a hallgatóknak az elaszticitás fogalmával kapcsolatos tesztet kellett kitölteniük az előadáson. Ebben a feladatban a megadott eredményt kellett értelmezniük oly módon, hogy az értelmezésben szereplő értékek mellé egy listából választhatták ki a megfelelő mértékegységeket. A 2. előadáshoz, a tesztcsoporthoz tartozó hallgatóból 150 írta meg a tesztet. A 3 itemre átlagosan 44,7%-ban válaszoltak helyesen (szórás 33%). Ezen belül a feladatban is szereplő **mértékegységeket** közel 50 %-os helyességgel töltötték ki, míg az elaszticitás fogalmát csupán 38% tudta helyesen.

Egy termék nyereségfüggvénye forintban

$$N(x) = 900x - 10 \cdot x^{\frac{3}{2}} - 100000,$$

ahol  $x$  a mennyiség négyzetméterben.

Az elaszticitás értéke  $x_0 = 1000$  esetén 0,88. Ez azt jelenti, hogy  esetén a mennyiség  növelésével a nyereség megközelítőleg

- 1 forint
- 0,88 százalék
- 1000 forint
- 1 négyzetméter
- 1000 négyzetméter
- 880 forint
- 880 négyzetméter

1. ábra

Az 5. előadás végi elaszticitás teszt

*Forrás: Coospace feladat képernyő*

Az 1. zárthelyiben az utolsó feladatban, a gazdasági alkalmazás utolsó részében szerepelt az elaszticitás, nem önállóan. A hallgatóknak egy összetett gazdasági függvénynek egy pontbeli elaszticitását kellett kiszámítaniuk és értelmezniük. Az eredmények kiértékelése után a következő megállapítást lehet megfogalmazni: A hallgatói eredmények nagyon gyengék lettek, a tesztcsoportban 26,8%, a kontrollcsoportban 22,2%, mindkét esetben nagyon nagy, körülbelül 150%-os relatív szórással. Ennek oka részben a feladat nehézségében, részben az elhelyezkedésében rejlik, sokan el sem kezdték ezt a részt. Az egyes csoportok is nagyon divergens eredményeket értek el (6,1% — 40,1%). Ez utóbbi magyarázható a deriválandó függvények különböző típusaival.

Az utolsó tesztet az 1. zárthelyi dolgozat után két héttel írták meg a tesztcsoport hallgatói. Szerettük volna látni, hogy mennyire mélyen épült be az elaszticitás fogalma a hallgatók tudásába. A tesztcsoport hallgatóinak az előadás végén egy elaszticitásszámítás eredményét kellett értelmezniük. A 2. előadáshoz, a tesztcsoporthoz tartozó hallgatóból 140-en töltötték ki a tesztet. Az értelmezést itemekre bontottuk és ezek alapján értékeltük. Az értelmezésre kapott eredmény lényegesen jobb lett, mint a korábbi, zárthelyi eredmények. A hallgatók átlagosan 48,9%-ot értek el, a szórás 36,5% lett.

Egy termék bevételi függvénye ezer forintban  
 $B(x) = x \cdot e^{8-0,125x}$ ,  
 ahol  $x$  az egységár ezer forintban.

**Feladat:** Fejezze be a mondatot az adatoknak megfelelően a lehető legpontosabban!  
 Az elaszticitás értéke  $x_0 = 6$  esetén 0,25. Ez azt jelenti, hogy ...

2. ábra

Az 7. előadás végi elaszticitás teszt

Forrás: Coospace feladat képernyő

A 2022/23-as tanév őszi félévében a kísérletet néhány változtatással megismételtük. Hasonlóan az előző félévhez, ebben is online formában került az előadás meghirdetésre. Ebben a félévben a beiratkozott 150 hallgató közül 133 az előző félévben is tanulta már a gazdasági matematikát. Mivel a félév a tantárgyat ismétlő hallgatók számára lett meghirdetve, így a korábbi 17 és az új 133 ismétlő hallgatók között nem tettünk különbséget. Az előadásokat nagyon kevés hallgató követte, hétről-hétre 20-30-an voltak bejelentkezve, az előadás végi tesztet viszont 61, illetve 55 fő írta meg. Az 1. előadástesztben a hallgatók jobb eredményt értek el, mint az előző fél évben, 56,8%-ot, a 2.-on viszont gyengébbet, 30,1%-ot. Ezt a mérést azonban csak azokra a hallgatókra tudtuk végrehajtani, akik kitöltötték. Így az eredményekből nem lehet széleskörű következtetéseket levonni. A félév során egy-egy lényeges változtatást eszközöltünk a tanításban és a számonkérésben. A félév során egy-egy lényeges változtatást eszközöltünk a tanításban és a számonkérésben. A tesztcsoporttal foglalkozó oktató a vizsgált gazdasági jelenséget számolástól függetlenül alaposabban körbejárta, a hangsúlyt a folyamat megértésére helyezte. A zárthelyi dolgozatban az elaszticitás számonkérésén változtattunk: önálló feladatként, a gazdasági számítás előtt szerepelt. Részben egy értelmezést kértünk, részben egy egyszerű, másodfokú problémának kértük a kiszámítását és interpretációját. Összesen 120 hallgató írta meg az 1. zárthelyi dolgozatot. A tesztcsoportban az eredmények lényegesen jobbak lettek, mint a kontrollcsoportban: 48,3% illetve 14%. Az 1. előadásteszt előhívási hatása ebben nem játszott szerepet, hiszen mindkét csoportban a hallgatók körülbelül 40%-a írta meg az előadástesztet.



a)

Adott egy padlóburkoló anyagokat előállító cég nyereségfüggvénye  $N(x)$  ezer forintban, ahol  $x$  változó a megtermelt mennyiséget fejezi ki négyzetméterben. Az elaszticitás értéke  $x_0 = 1200 \text{ m}^2$  esetén 0,88. Adja meg egy mondatban a feladatban szereplő elaszticitásérték pontos értelmezését a feladat szövegére vonatkoztatva!

b) Egy adott termék nyereségfüggvénye  $f(p) = -p^2 + 9p - 2$  (M €), ahol  $p$  az egységárat jelöli €/db-ban. Adja meg a nyereségfüggvényhez tartozó elaszticitásfüggvényt, számítsa ki a  $p = 3$  €/db egységárhoz tartozó pontelaszticitást és értelmezze a kapott eredményt!

3. ábra

Az 2022/23. 1. zárthelyi – elaszticitás

Forrás: saját szerkesztés

## 5. Következtetések, diszkusszió

Kutatásunk során megvizsgáltuk, milyen mélységben tudják a hallgatók az elaszticitás fogalmát elsajátítani. Az első hipotézist, miszerint a fogalom nem megfelelően rögzül a hallgatókban, elfogadjuk. A hagyományos oktatás és számonkérés során nagyon gyenge eredmények születtek mind a teszt-, mind a kontrollcsoportban. Tapasztalataink szerint a hallgatóknak nagy nehézséget jelent a matematikai műveletek megértése és végrehajtása, ehhez járul hozzá a gazdasági fogalmi értelmezés. A rendelkezésre álló rövid idő alatt nem alakul ki a hallgatókban a helyes fogalom képzet (concept image [15]) sem matematikai sem gazdasági értelemben. A 2. féléves felmérés során azzal a feltevéssel éltünk, hogyha a dolgozatban az elaszticitás önálló feladatként szerepel, és a számolás során nem a deriválás okoz nehézséget, a hallgatók eredményesen oldják meg a feladatot. Ezt kiegészítettük azzal, hogy a tesztcsoportban az oktató számításoktól függetlenül jobban körüljárta a közgazdasági problémát. A dolgozat eredményei azt mutatják, hogy az önálló feladat önmagában nem segítette ebben a félévben a sikeres feladatmegoldást. Ennek lehet oka az, hogy az ebben a félévben szereplő hallgatók többsége az előző félévben nem tudta teljesíteni ezt a tantárgyat. Ennek a feltevésnek a vizsgálatához nem álltak rendelkezésre az előző félévvel azonos feltételek. A feltevés második fele azonban igazolódni látszik. Vagyis azzal, hogy az oktató számításokról függetlenül jobban körüljárta a közgazdasági problémát, a hallgatókban mélyebb megértést eredményezett, így a feladatrész százalékos eredménye lényegesen jobb lett, mint a kontrollcsoportban. Összességében megállapítható, hogy a hallgatóknak mindkét félévben nagy problémát jelent a matematikai számítás, a gazdasági értelmezés és ennek a kettőnek az összekapcsolása.

A tapasztalatok alapján a következő félévben a kísérletet megismételjük, az elaszticitás fogalmát külön feladatban kérjük számon. A fogalom alaposabb körüljárásával annak értelmezésén lesz a hangsúly. A jobb megértést utóteszttel is tervezzük ellenőrizni.

## Irodalomjegyzék

- [1] Beichner, R.J. (1994). *Testing student interpretation of kinematics graphs*, American Journal of Physics, 62(8), 750–762.; <https://doi.org/10.1119/1.17449>
- [2] Csernyák, L. (2006): *Analízis - Matematika a közgazdasági alapképzés számára*, Nemzeti Tankönyvkiadó, ISBN 9631958958;

- 
- [3] Dietz, Hans M. (2012): *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Das ECOMath-Handbuch*. Springer; <https://doi.org/10.1007/978-3-642-29985-8>
- [4] Feudel F., Rolf Biehler (2021): *Students' Understanding of the Derivative Concept in the Context of Mathematics for Economics*, Journal Mathematik Didakt (2021) 42:273–305.; <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z>
- [5] Friedrich, H. (2001). *Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwertbegriff*. Journal für Mathematik-Didaktik, 22(3–4), 207–230.; <https://doi.org/10.1007/BF03338936>
- [6] Häikiöniemi, M. (2006): *Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process*. The Journal of Mathematical Behavior, 25(2), 170–184.; <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.002>
- [7] Hahn, S., & Prediger, S. (2008). *Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis*. Journal für Mathematik-Didaktik, 29(3–4), 163–198.; <https://doi.org/10.1007/BF03339061>
- [8] vom Hofe, R. (1998). *Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse*. Journal für Mathematik-Didaktik, 19(4), 257–291.; <https://doi.org/10.1007/BF03338877>
- [9] Hoffkamp, A. (2011). *The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: design principles and empirical results*. ZDM, 43(3), 359–372.; <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0322-9>
- [10] Koschnick J, Wolfgang (2015): *Management and Marketing / Management und Marketing* (English and German Edition) (s. 225); De Gruyter; Reprint 2015 ed. edition (January 22, 1998; Reprint 2015 ed. Edition);
- [11] Oktatási Hivatal (2021): 2.2. *A felsőoktatási intézményekben a hallgatók statisztikai száma képzési szintek és munkarend szerint*; <https://dari.oktatas.hu/firstat.index> ; letöltve: 2023.01.12.;
- [12] Oktatási Hivatal (2022): *Érettségi, statisztikák, vizsgaeredmények*; [https://www.ketszintu.hu/publicstat.php?stat=\\_2022\\_1](https://www.ketszintu.hu/publicstat.php?stat=_2022_1) ; letöltve: 2023.01.12.;
- [13] Schumann, J., U. Meyer, W. Ströbele (2011): *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*, 9. Auflage, Heidelberg, S. 73.; <https://doi.org/10.1007/978-3-642-21225-3>
- [14] Sydsæter, K., Hammond, P. J. (2015): *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Basiswissen mit Praxisbezug* . 4. aktualisierte Auflage. Pearson Deutschland GmbH;
- [15] Tall, D., Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169.; <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- [16] Zandieh, M. (2000). *A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative*. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education, IV (Vol. 8, pp. 103–127). Providence: American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/cbmath/008/06>