Különleges háromszögszámok - érdekességekről szemléltetéssel

Dr. Molnár István[1]– Borbola Gábor[2]
[1] *főiskolai docens*, [2]*mesteroktató*
[1] Budapesti Gazdasági Egyetem, Pénzügy és Számviteli Kar
[2] Gál Ferenc Egyetem, Egészség- és Szociális Tudományi Kar
[1] E-mail: molnar.istvan@uni-bge.hu, [2] borbola.gabor@gfe.hu

DOI: 10.29180/978-615-6342-61-4_6

Összefoglalás: A szerzők tanulmányukban a háromszögszámok tulajdonságait vizsgálják. Ennek során a matematikai bizonyítások mellett szemléletes bizonyításokat is adnak.

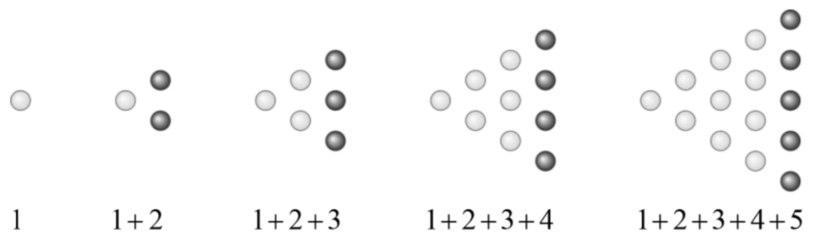
Kulcsszavak: figurális szám, háromszögszám, tulajdonságok, szemléletes bizonyítás

Abstract: The authors of this study looked into the characteristics of triangular numbers. During this investigation they gave not only mathematical but also illustrative proofs.

Keywords: figurate number, triangular number, properties, proofs without words

Bevezetés

Már a püthagoreusok is több számelméleti összefüggést ismertek. Módszerük lényege abban állt, hogy a számokat különböző formában rakták ki kavicsokkal, ami a számolótábla használatával volt összefüggésben. Így jutottak el többek között a háromszögszámokhoz. Ezek olyan számok, amelyek előállnak az első néhány egymást követő pozitív egész szám összegeként, azaz az $1+2+\ldots+n$ $\left(n \in Z^{+}\right)$ alakú számok. Nevüket onnan kapták, hogy szabályos háromszög alakba rendezhetők (1. ábra):



1. ábra

A tanulmányban a háromszögszámokkal kapcsolatban néhány tulajdonságot ismertetünk, melyekre a legtöbb esetben mind matematikai, mind pedig szemléletes bizonyítást is adunk.
Miért is „kell” a szemléltetéssel foglalkozni? A szemléletes bizonyítások bemutatása, megértetése elősegíti többek között azt a szemléletet, hogy egy

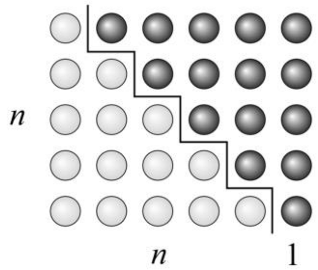
feladatot minél több felől próbáljunk megközelíteni, hogy más nézőpontból vizsgáljuk, tanulmányozzuk az adott problémát. Természetesen a szemléltetés sem elegendő önmagában; a vizuális levezetések és az algebrai bizonyítások közös, együttes alkalmazása biztosíthatja az érzéki megismerés és az elvont gondolkodás szoros kapcsolatának kiépítését.

A tulajdonságok bemutatása során T_n -nel jelöljük az n-edik háromszögszámot. (Legyen a $T_0 = 0$).

Állítás:

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Szemléletes bizonyítás (2. ábra) [1]:



$$2 \cdot T_n = n \cdot (n+1) \quad \Rightarrow \quad T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2. ábra

A háromszögszámok tulajdonságai

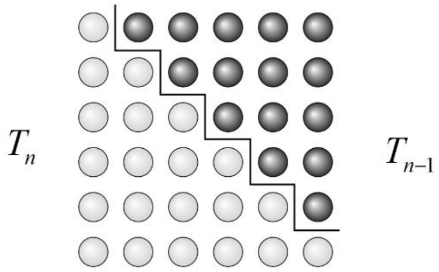
A háromszögszámokra teljesülnek a következő tulajdonságok:

1. tulajdonság: $T_{n-1} + T_n = n^2 \qquad (n \in Z^+)$

Bizonyítás:

$$T_{n-1} + T_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n-1+n+1) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

Szemléletes bizonyítás (3. ábra):



$$T_{n-1} + T_n = n^2$$

3.ábra

Megjegyzés

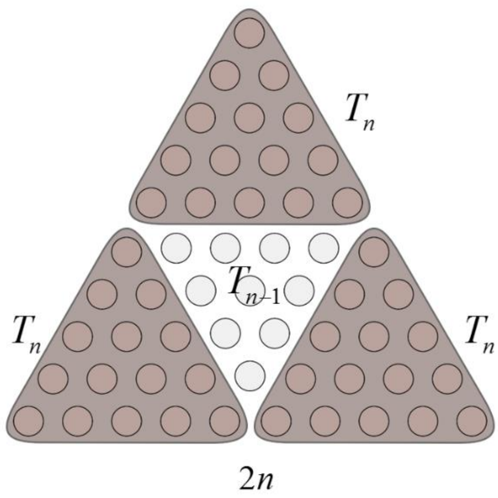
1. Az 1. tulajdonság alapján *két egymás utáni háromszögszám összege éppen egy teljes négyzet*. Felhasználva az ismert $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ $\left(n \in Z^+\right)$ összefüggést, belátható hogy: *az első néhány (pozitív) páratlan szám összege megadható két szomszédos háromszögszám összegeként*.
2. Figyelembe véve, hogy $T_{k-1} + k = T_k$ és a k helyére T_n-t írva, kapjuk, hogy $T_{T_n-1} + T_n = T_{T_n}$ $\left(n \in Z^+\right)$, azaz *végtelen sok olyan háromszögszámokból álló számpár van, amelyekben a tagok összege szintén háromszögszám.*

2. tulajdonság: $3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$ $\quad \left(n \in Z^+\right)$

Bizonyítás:

$$3T_n + T_{n-1} = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2} \cdot (3n+3+n-1) = \frac{n}{2} \cdot (4n+2) = \frac{2n(2n+1)}{2} = T_{2n}$$

Szemléletes bizonyítás (4. ábra):



$$3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$$

4. ábra

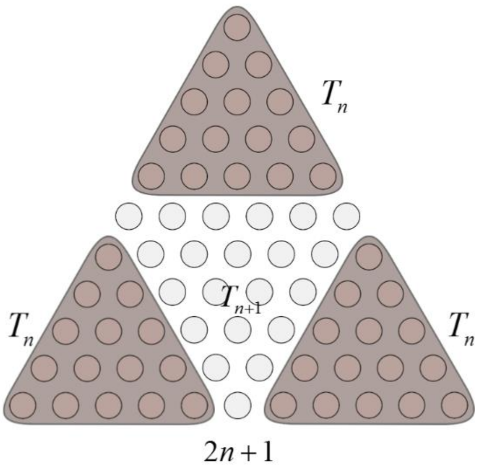
3. tulajdonság: $3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1} \qquad (n \in N)$

Bizonyítás:

$$3T_n + T_{n+1} = 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+1}{2}\cdot(3n+n+2) = \frac{n+1}{2}\cdot(4n+2) =$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = T_{2n+1}$$

Szemléletes bizonyítás (5. ábra):



$$3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$$

5. ábra

4. tulajdonság: $T_{n-1}\cdot T_{k-1} + T_n \cdot T_k = T_{nk} \qquad (n, k \in Z^+)$

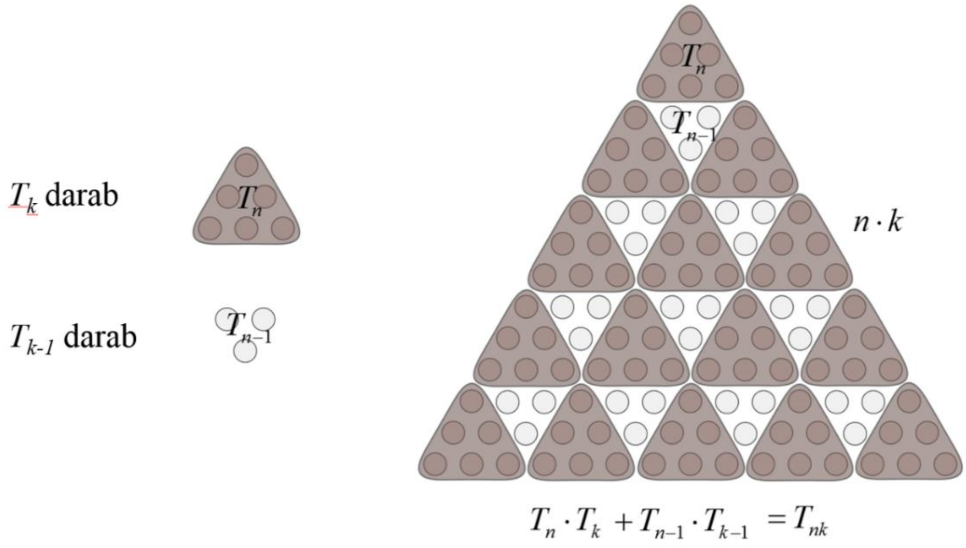
Bizonyítás:

$$T_{n-1}\cdot T_{k-1} + T_n\cdot T_k = \frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(k-1)k}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{k(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{nk}{4}\cdot[(n-1)(k-1)+(n+1)(k+1)] = \frac{nk}{4}\cdot(nk-k-n+1+nk+k+n+1) =$$

$$= \frac{nk}{4}\cdot(2nk+2) = \frac{nk(nk+1)}{2} = T_{nk}$$

Szemléletes bizonyítás (6. ábra) [2]*:*



6. ábra

Megjegyzés

Néhány „speciális eset” adott k értékek esetén:

Ha $k = 2$ $\quad T_{n-1} \cdot T_1 + T_n \cdot T_2 = T_{2n} \quad \Rightarrow \quad T_{n-1} + 3T_n = T_{2n}$ (2. tulajdonság)

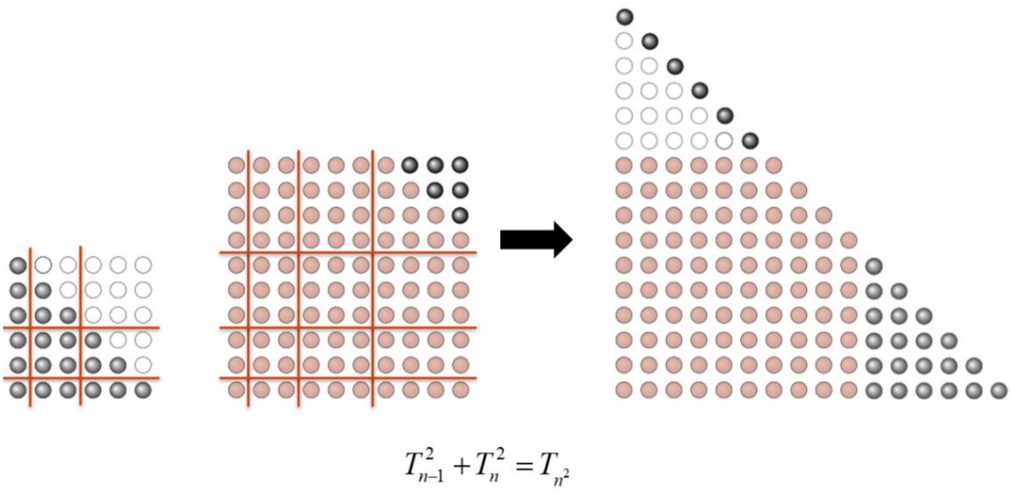
Ha $k = 3$ $\quad T_{n-1} \cdot T_2 + T_n \cdot T_3 = T_{3n} \quad \Rightarrow \quad 3T_{n-1} + 6T_n = T_{3n}$

Ha $k = n$ $\quad T_{n-1} \cdot T_{n-1} + T_n \cdot T_n = T_{n^2} \quad \Rightarrow \quad T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}$

(azaz *két egymás utáni háromszögszám négyzetösszege szintén háromszögszám*)

Ez utóbbi „speciális eset” szemléletesen is belátható.

Szemléletes bizonyítás (7. ábra):



7. ábra

5. tulajdonság: $T_{n-1}\cdot T_k + T_n\cdot T_{k-1} = T_{nk-1} \qquad \left(n,\, k\in Z^+\right)$

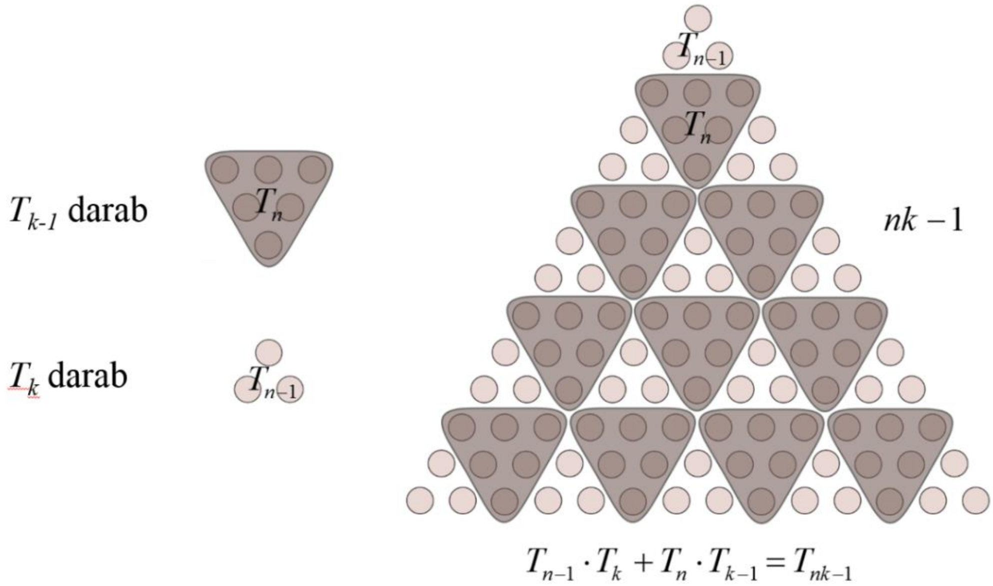
Bizonyítás:

$$T_{n-1}\cdot T_k + T_n\cdot T_{k-1} = \frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(k-1)k}{2}=$$

$$=\frac{nk}{4}\cdot\left[(n-1)(k+1)+(n+1)(k-1)\right]=\frac{nk}{4}\cdot(nk-k+n-1+nk+k-n-1)=$$

$$=\frac{nk}{4}\cdot(2nk-2)=\frac{(nk-1)nk}{2}=T_{nk-1}$$

Szemléletes bizonyítás (8. ábra):



8. ábra

Megjegyzés

Néhány konkrét esetben „újabb” érdekes összefüggésekhez jutunk:

Ha $k=2$ (illetve n helyére $n+1$ kerül)

$T_n\cdot T_2 + T_{n+1}\cdot T_1 = T_{2(n+1)-1} \quad\Rightarrow\quad 3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$ (3. tulajdonság)

Ha $k=3$ $\quad T_{n-1}\cdot T_3 + T_n\cdot T_2 = T_{3n-1} \quad\Rightarrow\quad 6T_{n-1}+3T_n = T_{3n-1}$

Ha $k=n$ $\quad T_{n-1}\cdot T_n + T_n\cdot T_{n-1} = T_{n^2-1} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot T_{n-1}\cdot T_n = T_{n^2-1}$

(azaz *két szomszédos háromszögszám szorzatának kétszerese szintén háromszögszám*)

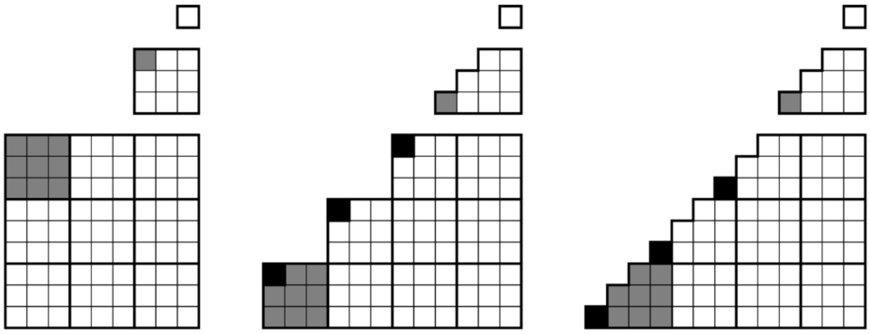
6. tulajdonság: A kilences számrendszerbeli $\underbrace{11...111}_{n\text{-szer}}$ $\left(n\in Z^+\right)$ szám a tízes számrendszerben háromszögszám. [3]

Bizonyítás:

$$\underbrace{11\ldots111}_{n\text{-szer}}{}_{(9)} = 1+9+9^2+\ldots+9^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 9^k = \frac{9^n-1}{9-1} = \frac{\left(3^n\right)^2-1}{8} = \frac{\left(3^n-1\right)\left(3^n+1\right)}{8} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3^n-1}{2}\cdot\frac{3^n+1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^n-1}{2}\cdot\left(\frac{3^n-1}{2}+1\right) = T_{\frac{3^n-1}{2}}$$

Szemléletes bizonyítás (9. ábra):



$$1+9+9^2+\ldots+9^{n-1} = 1+2+3+\ldots+\frac{3^n-1}{2} = T_{\frac{3^n-1}{2}}$$

9. ábra

7. tulajdonság: A $(2k+1)^2$ számrendszerbeli $\underbrace{\overline{T_k T_k \cdots T_k}}_{n-szer}$ $\left(n,k\in Z^+\right)$ szám a tízes számrendszerben háromszögszám. (6. tulajdonság általánosítása)

Bizonyítás:

Figyelembe véve, hogy $k\in Z^+$, könnyen belátható, hogy $T_k = \frac{k(k+1)}{2} < (2k+1)^2$, azaz T_k „létező számjegy” a $(2k+1)^2$ számrendszerben.

$$\underbrace{\overline{T_k T_k \cdots T_k}}_{n-szer}{}_{\left((2k+1)^2\right)} = T_k\cdot\left[1+(2k+1)^2+(2k+1)^4+\ldots+(2k+1)^{2n-2}\right] = T_k\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(2k+1)^{2i} =$$

$$= T_k\cdot\frac{(2k+1)^{2n}-1}{(2k+1)^2-1} = \frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{\left[(2k+1)^n\right]^2-1}{4k^2+4k} = \frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{\left[(2k+1)^n-1\right]\cdot\left[(2k+1)^n+1\right]}{4k(k+1)} =$$

$$= \frac{\left[(2k+1)^n-1\right]\cdot\left[(2k+1)^n+1\right]}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k+1)^n-1}{2}\cdot\frac{(2k+1)^n+1}{2} =$$

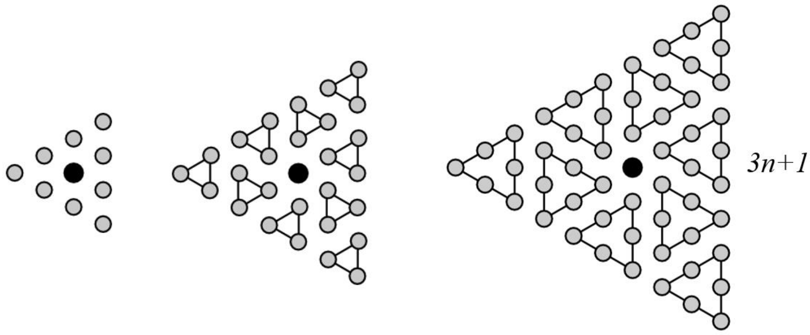
$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{(2k+1)^n-1}{2}}_{\in Z^+}\cdot\left(\frac{(2k+1)^n-1}{2}+1\right) = T_{\frac{(2k+1)^n-1}{2}}$$

8. tulajdonság: Egy háromszögszám kilencszereséhez egyet hozzáadva újabb háromszögszámot kapunk.

Bizonyítás:

$$9T_n + 1 = 9 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = T_{3n+1}$$

Szemléletes bizonyítás (10. ábra):



$$9T_n + 1 = T_{3n+1}$$

10. ábra

Megjegyzés

Bizonyítható a 8. tulajdonság egy általánosítása: *a* $(2k+1)^2 \cdot T_n + T_k \quad (n \in N,\, k \in Z^+)$ *szintén háromszögszám.*

Összegzés

A nem formális bizonyítások szükségességét számos didaktikai elv, mint például a fokozatosság, a reprezentációs szintek és a szemléltető eszközök variálása stb. alátámasztja [4]. A képi megjelenítésnek fontos szerepe van a megértés folyamatában, mely a későbbi visszaidézést is egyszerűbbé teheti.

A tanulmányban – a háromszögszámok példáján keresztül – igyekeztünk bemutatni a képi reprezentáció fontosságát, szemléletes bizonyításokon keresztül (melyekhez kapcsolódóan természetesen nem hiányozhatnak az egzakt formális levezetések sem).

Irodalomjegyzék

[1] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Washington, 1993;

[2] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Washington, 2000;

[3] Molnár I., Borbola G.: *A háromszögszámokról I.*, Körös Tanulmányok, Békéscsaba, Szent István Egyetem Gazdasági Kar, 2012; pp. 241-248;

[4] Makó Z., Téglási I.: *Indoklás és bizonyítás*, Educatio Kht., Hallgatói Információs Központ, 2011.