Bánhalmi Árpád*
Bakos Viktor**

MIÉRT BUKNAK MEG STATISZTIKÁBÓL A JÓ MATEKOSOK?

A BGF KKFK Nemzetközi gazdálkodás és Kereskedelem és marketing szakjain a hallgatók tanrendjében statisztikai és matematikai jellegű tárgyak szerepelnek. Azt tapasztaltuk, hogy a matematikából jól teljesítő hallgatók közt sokaknak a statisztika eredményei az átlagos színvonal alatt vannak. Ez motiválja azt, hogy megvizsgáljuk, ezeknél a hallgatóknál miként lehetséges, hogy a két tantárgy esetében a rokonterületeket másként és másként értik meg.

Felmerül a kérdés, hogy a diákok tudják-e az egyik tárgyból megszerzett ismereteket a másik tárgynál is alkalmazni, illetve milyen mértékben tudják transzferálni a tudásukat. Igyekszünk feltérképezni azokat a tényezőket, amelyek megakadályozzák a hallgatókat abban, hogy lássák a fogalmak közötti párhuzamokat.

A vizsgálatunk célja, hogy rávilágítsunk azokra az eljárásokra, fogalmakra, amelyeket ha az oktatásban hangsúlyosabbá teszünk, elősegítik a hallgatók látókörének kiszélesedését és az egyes területek közötti kapcsolatok megismerését.

A vizsgálat során elkülönítettük azokat a fogalmakat, amelyek közt párhuzam vonható az egyes tárgyakban, és a hallgatók dolgozatai alapján vizsgáltuk az egyes fogalmak megértettségei közötti kapcsolatot. Azon fogalmak esetében, ahol az egyidejű megértés nem megy végbe, javaslatot teszünk a tantárgyak tematikájában ezen fogalmak hangsúlyosabbá tételére.

Tekintsük át a matematikában és statisztikában tanult rokonfogalmakat. Analízisből az első félév során a hallgatók megismerkednek *az elaszticitás, a bevételfüggvény* fogalmával és a *többváltozós függvények szélsőértékének* vizsgálatával.

Az elaszticitással később a statisztika II. tantárgyban is foglalkoznak. Mindkét alkalommal tudniuk kell kiszámítani és részletesen értelmezni a kapott mutatót. Míg az első félévben megtanulják tetszőleges gazdasági függvény esetében kiszámítani és értelmezni a rugalmasságot, addig a statisztikában „rácsodálkoznak” az egyszerű lineáris függvényből adódó képletre, nem kapcsolják öszsze a differenciálszámítás gazdasági alkalmazásával.

A bevételfüggvény fogalmával szintén az első félévben ismerkednek meg, ahol hallhatnak arról az egyszerű összefüggésről, hogy a bevétel mint érték, az egységár és a mennyiség szorzata. Az esetek többségében már az első félévben nehézséget okoz ennek megértése. A bevétel fogalmával a statisztika I. tárgy esetén is találkoznak, ahol ez a probléma szintén fenn áll. A statisztika feladatok megoldása során nem tudják megkülönböztetni az *árat* az *árbevételtől* vagy a *volument* az *értéktől* (*value*), illetve az ár, érték és volumen értékeit nem tudják megkülönböztetni az ár-, érték- és volumenváltozástól.

A többváltozós függvények szélsőértékének vizsgálatát az első félévben tanulják analízisből, és a tapasztalat azt mutatja, hogy az optimalizálás elvét a többség megérti, és a feladatokat hibátlanul

* BGF Külkereskedelmi Főiskolai Kar, Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, főiskolai tanársegéd.
** BGF Külkereskedelmi Főiskolai Kar, Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, főiskolai tanársegéd.

megoldják. Ám a statisztika II-ben vett legkisebb négyzetek módszerét nem legtöbben nem tudják feldolgozni, pedig az a többváltozós függvények szélsőérték meghatározásának egyszerű alkalmazása.

Valószínűség-számításból a második félév során a hallgatók a következő fogalmakkal találkoznak: relatív gyakoriság, átlag, szórás, valószínűségi fa, feltételes valószínűség, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, konfidencia intervallum és a kétdimenziós eloszlások alapfogalmai.

Valószínűség-számításból és statisztikából egyaránt hallanak a relatív gyakoriságról. Ebben az esetben az az érdekes, hogy a valószínűség fogalmát értik meg nehezebben a hallgatók, mert gyakran előforduló típushiba, hogy 1-nél nagyobb valószínűséget adnak meg, de 1-nél nagyobb relatív gyakoriságot a statisztikai feladatok megoldásánál nem adnak meg. Továbbá nem ismerik az összefüggést a kumulált relatív gyakoriság és az eloszlásfüggvény között, amelyet diszkrét esetben kumulált valószínűségek segítségével határoznak meg.

A hallgatók nem látják a párhuzamot a várható érték fogalma és az átlagos érték között, valamint a szórások között. Holott kiszámításuk formailag is megegyezik, csak míg a valószínűségszámításban a valószínűségi változó lehetséges értékeit súlyozzuk a valószínűségekkel, addig statisztikában az ismérvértékeket súlyozzuk a relatív gyakorisággal. A szórás esetében a valószínűségi változó értékei az ismérvértékeknek, a valószínűség pedig a relatív gyakoriságnak felel meg. Valószínűség-számításból csak a $D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}$ képletet használják, addig statisztikából, ha az ennek megfelelő képletet kell használni, akkor a hallgatók többsége tanácstalan. A statisztika II. tárgy tanulása során gondot okoz a próbastatisztikák várható értékének és szórásának megértése, mert a véletlen mintavétel fogalmát nem kapcsolják össze a valószínűségi változó fogalmával. A várható érték és a szórás lineáris transzformációhoz kapcsolódó tulajdonságait a hallgatók túlnyomó többsége elsajátítja, de statisztikából az ismérvértékek transzformációjára már nem tudják alkalmazni. Ennek az lehet az oka, hogy valószínűség-számításból ez egy egyszerű, formális levezetést jelent nekik, míg a statisztika esetében egy szöveg értelmezése után kell ezt elvégezniük.

A valószínűségi fa a kombinatív osztályozás egy lehetséges módja, amelyet egy folyó szöveg alapján a többség hibátlanul felrajzol. A statisztika tanulmányaik során a kombinációs táblát használják a kombinatív osztályzás szemléltetésére, viszont egy kombinációs tábla szöveg alapján történő felrajzolása már jelentős gondot okoz. A valószínűségi fa esetén a Bayes-tétel alkalmazása során inkább formális hibát követnek el, míg a kombinációs tábla esetén a feltételes megoszlási viszonyszámok viszonyítási alapját tévesztik el. Az előbbi műveleti, az utóbbi szövegértési probléma.

Mivel az integrálszámítást nem tanulják meg alaposan, nem tudják összefüggésbe hozni a valószínűséget a sűrűségfüggvény függvény alatti területtel. Ez később a szignifikancia és megbízhatósági szint, mint valószínűség meg nem értéshez vezet, bár grafikusan tudják ábrázolni. A konfidencia intervallum meghatározása a valószínűség-számítás és statisztika tárgyból is jól megy a hallgatóknak.

A vizsgálatba vont hallgatók a 2006/2007-es tanévben első évre beiratkozott nappali tagozatos Nemzetközi gazdálkodás és Kereskedelem és marketing szakos hallgatók. A gazdasági matematika tárgyból legalább 80%-ot teljesítő hallgatók köréből választottunk ki véletlenszerűen 12-t. A gazdasági matematika II. és a statisztika I. kollokviumi dolgozatok eredményeit dolgoztuk fel.

A gazdasági matematika II. dolgozat témakörei a következők voltak:

- Normális eloszlás vizsgálata
  - ⇒ Intervallumba esés valószínűségének kiszámítása
  - ⇒ Előre megadott valószínűséggel konfidencia intervallum meghatározása
  - ⇒ Előre megadott valószínűséggel intervallum határának keresése
  - ⇒ GAUSS-görbén való ábrázolás
- Valószínűségi fa
  - ⇒ A valószínűségi fa diagramjának felrajzolása
  - ⇒ A teljes valószínűség tételének alkalmazása
  - ⇒ A BAYES-tétel alkalmazása

- CSEBISEV-egyenlőtlenség
  ⇒ Intervallumba esés valószínűségének becslése ismeretlen eloszlás esetén
  ⇒ Intervallumba esés valószínűségének kiszámítása nevezetes eloszlás esetén
- Sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény
  ⇒ Sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény tulajdonságainak ellenőrzése
  ⇒ Sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény kapcsolata
  ⇒ Várható érték és szórás kiszámítása folytonos esetben

A statisztika I. témaköreit a vizsgálatunk számára érdekes témakörökre szűkítettük:

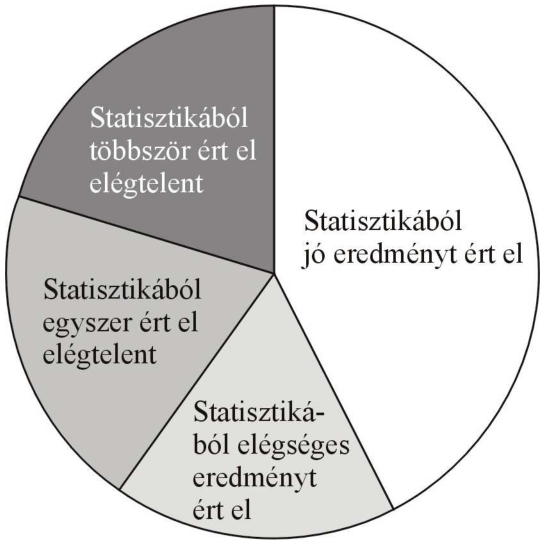
- Eloszlásjellemzők
  ⇒ Helyzetmutatók
    - Átlag, módusz, medián kiszámítása és értelmezése
  ⇒ Szóródási mutatók
    - Szórás és relatív szórás kiszámítása és értelmezése
  ⇒ Alakmutatók
    - A PEARSON-féle aszimmetriamutató kiszámítása és értelmezése
- Kapcsolatvizsgálat
  ⇒ Asszociációs és vegyes kapcsolat esetén statisztikai tábla szerkesztése, a megfelelő mutatók kiszámítása és értelmezése

A matematikából legjobban teljesítő hallgatók 42%-a teljesít jól statisztikából is, a rosszabbul teljesítő 58% körében 71% volt a bukási arány. Az ismétlővizsgán ezen hallgatók fele ment át.

A vizsgált matematika feladatok (lásd feljebb) körében az átlagos eredmény minden részfeladatnál legalább 75% volt, továbbá mindegyiknél elmondható, hogy a többségnek sikerült megoldania.

Az egyes feladatokat külön-külön vizsgálva az tapasztalható, hogy a három vagy négy alkérdés eredményessége csökkenő tendenciát mutat. Míg az a) kérdést mindenki megoldotta helyesen, addig a b)-t már nem mindenki, a c) és a d) feladatokat pedig még kevesebb hallgatónak sikerült.

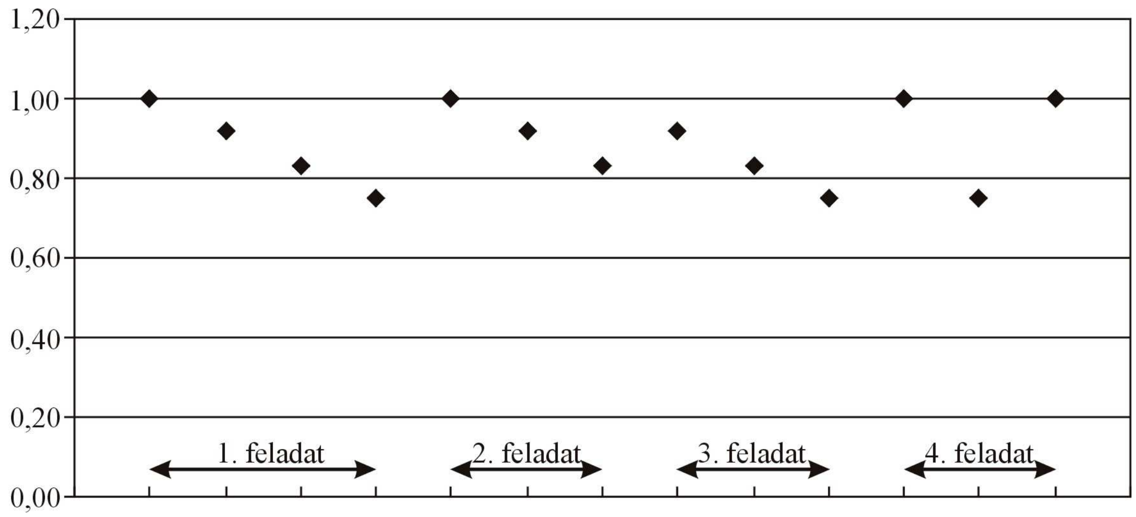
A statisztika feladatok átlagos eredményessége hasonló képet mutat, mint a matematikáé. A középérték mutatók meghatározása és értelmezése sikerült a legjobban, a szóródási és aszimmetria mutatók kevésbé sikerültek, a kapcsolatvizsgálat pedig a legkevésbé.



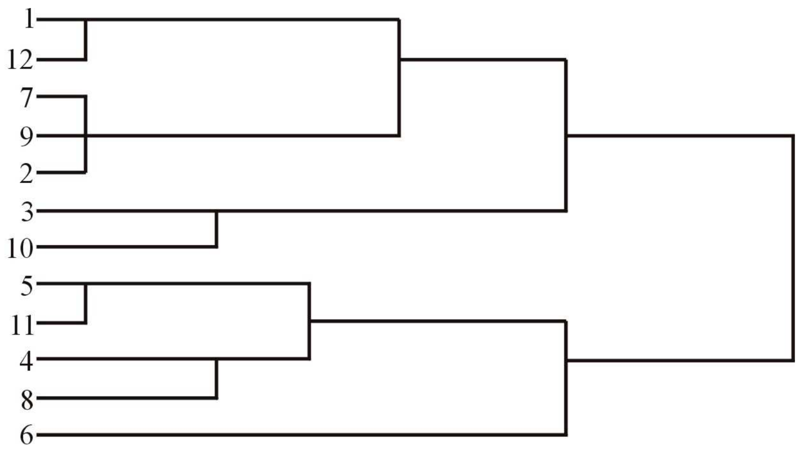
1. ábra
Matematikából jó eredményt elért hallgatók megoszlása

A sztochasztikus kapcsolat kimutatása vizsgálatunkban összetettebb feladatnak mondható, hiszen itt előfordult olyan feladat is, amelyben a statisztikai táblát szövegből kellett meghatározni vagy több kapcsolat erősségét kellett összehasonlítani.

Hierarchikus klaszteranalízis segítségével a hallgatókat csoportokra bontottuk a gazdasági matematika II. és statisztika I. tárgyak kollokviumain az egyes témakörökből elért eredményeik alapján. A kapott eredményt a *3. ábrán* látható *dendogram* mutatja.



2. ábra
A matematika feladatok eredményessége (%)



3. ábra

A hallgatókat alapvetően két csoportra lehet bontani, ezeket pedig további három-három alcsoportra. Az egyes csoportokba tartozó hallgatók eredményeit megvizsgálva a következőképpen interpretálhatóak.

A dendogram felső részén elhelyezkedő hét hallgató statisztikából legalább elégséges eredményt ért el, míg az alsó öt hallgató elégtelen osztályzatot kapott. A {1; 12} hallgatói csoportnak a normáleloszlással voltak gondjai, míg a {7; 9; 2} csoport teljesített a legjobban, szinte hibátlanul oldották meg a vizsgált feladatokat. Továbbá ezek a hallgatók értek el legalább közepes eredményt statisztikából.

A {3; 10} csoport elégséges eredményt ért el statisztikából, ami többek között annak köszönhető, hogy nem sikerült az aszimmetria mutató kiszámítása és értelmezése, valamit a sztochasztikus kapcsolat kimutatása. Matematikából pedig az intervallumba esés valószínűségének kiszámítása okozott gondot nevezetes folytonos eloszlás esetén.

Az {5; 11} hallgatók matematikából hibátlanul teljesítettek, statisztikából mégis megbuktak. A {4; 8} csoportba tartozók matematikából keveset hibáztak, a vizsgált statisztikai feladatok szintén nagyon jól sikerültek, mégis elégtelen eredményt értek el összességében. A 6. sz. hallgató matematikából hasonlóan jó eredményt ért el, mint az előző csoport hallgatói, de a vizsgált statisztikai mutatókat egyáltalán nem határozta meg.

A vizsgálatunk eredményét úgy összegezhetjük, hogy a matematikából jó eredményt elérő hallgatók körében statisztika I. tárgyból a bukási arány megegyezik a teljes évfolyamnál tapasztalható bukási aránnyal. A sikeres statisztika vizsgát teljesítők esetében viszont magasabb a jó eredményt elérők aránya. Az egyes témakörök kapcsolatát vizsgálva a matematika témakörei és a statisztika témakörei egymással nincsenek kapcsolatban (a lineáris korrelációs együtthatók értéke nullához közeli). Ebből az a következtetés vonható le, hogy a hallgatók a matematika és statisztika alapfogalmait csak a megadott kontextusban tudják biztonsággal alkalmazni, a különböző rokon fogalmakat más területen nehezen értelmezik.

A javaslatunk az, hogy az oktatás során kapjanak nagyobb hangsúlyt az egyes alapfogalmak közti analógiák. Így az oktatás eredményesebbé válhat.