ZIBOLEN ENDRE[1]

Duopóliumokról nemcsak „játékosan”

A játékelmélet és alkalmazásai egyaránt érdekelhetik mindazokat, akik a következő szakterületeket művelik, tanulják: (alkalmazott matematika, informatika), közgazdaságtan, menedzsmenttudományok (operációkutatás). Ami a játékelmélet tanulmányozása során jól jöhet, az a matematikai analízis, lineáris algebra és valószínűségelmélet alapjainak ismerete. A történetileg legrégebbi duopóliumok tárgyalása azonban ennél jóval egyszerűbb lesz, minthogy a Nash-féle egyensúlyi helyzet definícióján túlmenően pusztán csak középiskolai ismereteket igényel.

Az előadás célja, hogy a legismertebb duopóliumokat és a kapcsolódó játékelméleti fogalmakat, összefüggéseket részben általánosan, ugyanakkor mindig példákon keresztül is ismertesse. A közgazdaságtan iránt közelebbről érdeklődő olvasó számára feltétlen ajánljuk Koppány Krisztián kiváló elemzését, amelynek címe „Rövid útmutató a duopólium modellekhez kapcsolódó feladatok megoldásához”, és amelynek közvetlen webcíme az alábbi:

http://rs1.szif.hu/~koppanyk/web/segedlet/E-learning%20kepzes/Mikrookonomia/duop%f3liumok_e-learning.pdf.

E tanulmány értékelésénél feltétlenül figyelembe kell venni, hogy érdemi részei – azaz az 1–5. fejezetek, kis kiegészítésektől eltekintve – Vladimir Mazalov *Mathematical Game Theory and Applications* című 2014-ben megjelent könyve 1.1.–1.6. pontjai másodközlésének tekinthetők. A tanulmány *6. Függelék a részletszámításokhoz* pontja – bár nyilvánvalóan elemi – sajátnak tekinthető.

1 Zibolen Endre főiskolai docens, BGE KKK MITO (Budapesti Gazdasági Egyetem Külkereskedelmi Kar Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály); e-mail-cím: zibolen.endre@uni-bge.hu.

1. Kétszemélyes normál formájú játékok

Tegyük fel, hogy két játékosunk van, *I* és *II*. Az *I* játékos választ egy bizonyos x stratégiát egy X halmazból, míg a *II* játékos ezzel egyidejűleg választ valamely y stratégiát egy Y halmazból. Az *I* és *II* játékosok kifizetési függvényeit jelölje $H_1(x, y)$ és $H_2(x, y)$.

1.1 definíció. *Egy normál formájú játék egy* $\Gamma = < I, II, X, Y, H_1, H_2 >$ *objektum, ahol X, Y az I és II játékosok stratégiáinak halmazát jelöli, míg* H_1, H_2 *a játékosok kifizetési függvényeit azonosítja:* $H_i: X \times Y \to R$, $i = 1, 2$.

Mindegyik játékos a saját kifizetési értékének maximalizálására törekszik. Tekintsük most a Nash-egyensúlypont fogalmát, a játékelmélet egyik központi elemét.

1.2 definíció. *Egy Γ játék Nash-egyensúlypontja azon* (x^*, y^*) *stratégiák halmaza, amelyekre fennállnak a*

$$\begin{aligned} H_1(x, y^*) &\le H_1(x^*, y^*) \\ H_2(x^*, y) &\le H_2(x^*, y^*) \end{aligned} \tag{1.1}$$

feltételek a játékosok tetszőleges x, y stratégiái mellett.

Ha létezik Nash-egyensúlypont, akkor azt mondjuk, hogy a $H_1^* = H_1^*(x^*, y^*)$, $H_2^* = H_2^*(x^*, y^*)$ kifizetések optimálisak. Az (x, y) stratégiák egy halmazát gyakran stratégiaprofilnak hívják.

2. A Cournot-duopólium

A Cournot-duopólium 1838-ban jelent meg, mint az egyik első játékmodell, melyben két vállalat ugyanazt a terméket gyártja q_1 és q_2 mennyiségben és $p-q_1-q_2$ egységárban, ahol p a kezdeti ár. Jelöljön c olyan egységköltséget, amelyre $c < p$. Következésképpen a játékosok kifizetési függvényei (profitjai)

$$H_1(q_1, q_2) = (p-q_1-q_2)q_1-cq_1, \; H_2(q_1, q_2) = (p-q_1-q_2)q_2-cq_2 \,. \tag{2.1}$$

Ekkor a játék úgy definiálható, mint $\Gamma =< I, II, Q_1 = [0, \infty), Q_2 = [0, \infty), H_1, H_2 >$. Az (1.1) miatt a Nash-egyensúlypont meghatározása – az (1.1) szerint – két feladat megoldásával jár együtt, nevezetesen a $\max\limits_{q_1} H_1(q_1, q_2^*)$ és $\max\limits_{q_2} H_2(q_1^*, q_2)$ maximumfeladatok megoldásával.

Amit még be kell látnunk, az az, hogy a maximum a $q_1 = q_1^*$, $q_2 = q_2^*$ mellett érhető el. A $H_1(q_1, q_2^*)$ és $H_2(q_1^*, q_2)$ kvadratikus függvények az alábbi értékek mellett maximalizálhatóak:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}\left(p - c - q_2^*\right), \\ q_2 &= \frac{1}{2}\left(p - c - q_1^*\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Megjegyzés. A (2.2) és (2.3) más megközelítését lásd még az *1*. és *2*. *Függelék*ben.

2.1. állítás. *A Cournot-duopólium Γ játékának egy Nash-egyensúlypontja létezik, melyre*:

$$\begin{aligned} q_1 = q_1^* &= \frac{1}{2}\left(p - c - q_2^*\right) \\ q_2 = q_2^* &= \frac{1}{2}\left(p - c - q_1^*\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.3}$$

2.1. állítás első igazolása. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$q_1^* \neq q_1, \text{ vagy } q_2^* \neq q_2 . \tag{2.4}$$

Ekkor, mivel a konkáv kvadratikus függvényeknek abszolút maximuma van, és ezt egyetlen helyen, most a q_1-ben és q_2-ben veszik fel, így vagy az, hogy $H_1(q_1^*, q_2^*) < H_1(q_1, q_2^*)$, vagy az, hogy $H_2(q_1^*, q_2^*) < H_2(q_1^*, q_2)$ kellene, hogy teljesüljön, vagyis a (q_1^*, q_2^*) biztosan nem lenne Nash-egyensúlypont. Mivel a (2.4) indirekt feltétel ellentmondáshoz vezetett, ezzel igazoltuk a *2.1 állítás* helyességét, vagyis azt, hogy (2.2)-ben $q_1 = q_1^*$ és $q_2 = q_2^*$, azaz fennáll, hogy

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{1}{2}\left(p - c - q_2^*\right) \\ q_2^* &= \frac{1}{2}\left(p - c - q_1^*\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.5}$$

2.1. állítás második igazolása. A Cournot-duopóliumra vonatkozóan tételezzük fel, hogy (q_1^*, q_2^*) Nash-egyensúlypont. Innen tetszőleges q_1-re fennáll, hogy $H_1(q_1, q_2^*) \leq H_1(q_1^*, q_2^*)$. Ugyanakkor az első változójában konkáv kvadratikus $H_1(q_1, q_2^*)$ függvény a $q_1 = \frac{1}{2}$ $(p - c - q_2^*)$-ben és csak ebben felveszi abszolút maximumát. Utóbbi miatt $H_1(q_1^*, q_2^*) \leq H_1(q_1, q_2^*)$. Az utolsó két egyenlőtlenség szerint $H_1(q_1, q_2^*) = H_1(q_1^*, q_2^*)$. Minthogy a $H_1(q_1, q_2^*)$ az abszolút maximumot csak q_1-ben veszi fel, így fennáll, hogy $q_1 = q_1^*$ és $q_2 = q_2^*$, tehát (2.5) első összefüggése teljesül. Hasonlóan adódik, hogy $q_2^* = \frac{1}{2}(p - c - q_1^*)$egyértelműen létezik.

Természetesen a (2.4) mennyiségeinek nemnegatívaknak kell lenniük, amiből az következik, hogy

$$q_i^* \leq p - c, i = 1, 2. \tag{2.6}$$

Megoldva a q_1^*, q_2^*-ra leszármaztatott (2.5) egyenletrendszert, a (2.6) feltételt kielégítő alábbi eredményt kapjuk:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{p-c}{3} \quad . \tag{2.7}$$

Az optimális kifizetések az alábbiak lesznek:

$$H_1^* = H_2^* = \frac{(p-c)^2}{9} \quad . \tag{2.8}$$

A (2.7) és (2.8) többféle, részletes igazolását a *3.–4.* és *5.–7. Függelékek* foglalják magukban.

1. *Megjegyzés*. Legyünk óvatosak, eddig még csak azt bizonyítottuk be, hogy ha (q_1^*, q_2^*) Nash-egyensúlypont, akkor (2.7) szerint $q_1^* = q_2^* = \frac{p-c}{3}$, ugyanakkor azt még nem láttuk be, hogy ez fordítva is igaz, vagyis ha $\boldsymbol{q}_1^* = q_2^* = \frac{p-c}{3}$, azaz (2.7) fennáll, akkor (q_1^*, q_2^*) tényleg Nash-egyensúlypont. Mivel (2.7) a (2.5) egyenletrendszer megoldása, így (2.5) fennáll, ahol a (2.5) származtatása miatt q_1^*-re, q_2^*-re és tetszőleges $\tilde{q}_1$-re $H_1(\tilde{q}_1, q_2^*) \leq H_1(q_1^*, q_2^*)$ igaz, valamint tetszőleges $\tilde{q}_2$-re $H_2(q_1^*, \tilde{q}_2) \leq H_2(q_1^*, q_2^*)$, így (q_1^*, q_2^*) valóban egyértelmű Nash-féle egyensúlypont.

2. *Megjegyzés*. A Cournot-féle duopólium fenti számításainak megértéséhez és elvégzéséhez már elegendőek a középiskolás ismeretek, de az *1. Függelék* és *2. Függelék* szerint a legfontosabb lépéseket kétféleképpen is részletezve, a számítások még könnyebben végezhetők el a BGE egyes karain rendelkezésre álló angol nyelvű Maple V.1, illetve magyar nyelvű DERIVE 6.1 matematikai programok segítségével (l. *5.–8. Függelék*).

Ábrázoljuk a (2.1) kifizető- és a (2.2)-ből a $q_1 = q_1^*$, $q_2 = q_2^*$ helyettesítéssel adódó és így a Nash-féle egyensúlyhelyzetnek megfelelő, „legjobb válasz” néven ismert függvényeket, ha $p = 1$ és $c = 1/2$.

$$H_1(q_1, q_2) = (p-q_1-q_2)q_1-c \cdot q_1 = (1-q_1-q_2)q_1-\frac{1}{2}q,\ \ H_2(q_1, q_2) = (1-q_1-q_2)q_2-\frac{1}{2}\ q_2.$$

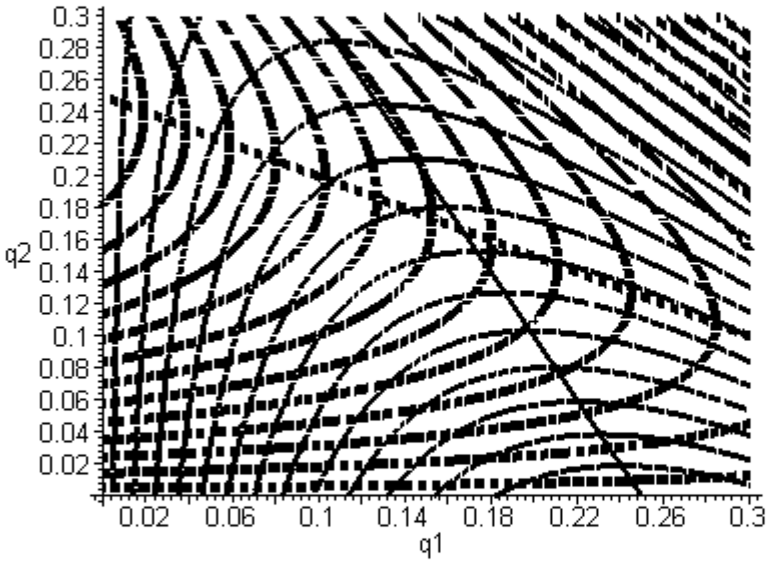
$$q_1 = \frac{1}{2}\left(p-c-q_2\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-q_2\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}q_2 \Leftrightarrow q_1+\frac{1}{2}q_2-\frac{1}{4}=0 \text{ . Ugyanígy } q_2+\frac{1}{2}q_1-\frac{1}{4}=0\,.$$

A feladat tehát az alábbi implicit megadású függvények ábrázolása különböző C_i-k mellett:

$$(1-q_1-q_2)q_1-\frac{1}{2}q_1 = C_1,\ (1-q_1-q_2)q_2-\frac{1}{2}q_2 = C_2,\ \ q_1+\frac{1}{2}q_2-\frac{1}{4}=0,\ \ q_2+\frac{1}{2}\ q_1-\frac{1}{4}=0. \qquad (2.9)$$

Az első két kifizető- és az utolsó két legjobbválasz-függvény ábrája az alábbi lesz:

1. ábra: *Cournot-duopólium*



A folytonos (szaggatott) egyenes az első (második) legjobb választ, ill. reakciófüggvényt jelöli, míg a folytonos (szaggatott) görbesereg az első (második) kifizető-, illetve profilfüggvényt írja le.

3. *Megjegyzés*. A Cournot-duopólium *1. ábrája* Maple-lel is kiadódhat pl. a *8. Függelék* szerint.

2.2 Állandó javítás eljárás

Képzeljük el, hogy az *I* játékos ismeri a *II* játékos q_2 stratégiáját. Ekkor az ő *legjobb válasza* az a q_1 stratégia, amely a maximális $H_1(q_1, q_2)$ kifizetést eredményezi. Emlékeztetünk rá, hogy rögzített q_2-re a $H_1(q_1, q_2)$ konkáv parabola, amelynek csúcsa az alábbi pontnál van:

$$q_1 = \frac{1}{2}(p - c - q_2). \tag{2.10A}$$

A legjobbválasz-függvényt úgy jelöljük, hogy $q_1 = R(q_2) = \frac{1}{2}(p - c - q_2)$. Ehhez hasonlóan, ha az *I* játékos q_1 stratégiája ismertté válik a *II* játékos számára, akkor az ő legjobb válasza a maximális $H_2(q_1, q_2)$ kifizetésnek megfelelő q_2 stratégia. Más szavakkal:

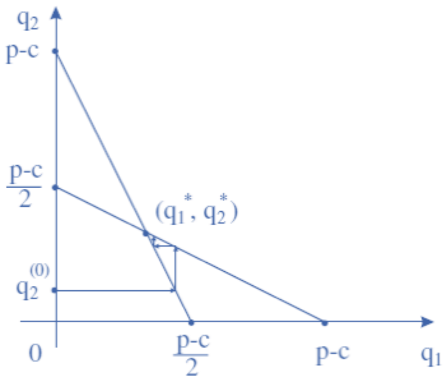
$$q_2 = R(q_1) = \frac{1}{2}(p - c - q_1). \tag{2.10B}$$

Kössük össze a legjobb válaszok (2.10A)–(2.10B) pontjait a (q_1, q_2) síkon (lásd a *2. ábrát*). Tetszőleges $q_2^{(0)}$ kezdeti stratégiára megkonstruáljuk a legjobb válaszok sorozatát:

$$q_2^{(0)} \to q_1^{(1)} = R\left(q_2^{(0)}\right) \to q_2^{(1)} = R\left(q_1^{(1)}\right) \to \ldots \to q_1^{(n)} = R\left(q_2^{(n-1)}\right) \to q_2^{(n)} = R\left(q_1^{(n)}\right) \to \ldots \tag{2.11}$$

A $\left(q_1^{(n)}, q_2^{(n)}\right)$ sorozatot a legjobbválasz-sorozatnak nevezik. Az ilyen iterációs eljárás megfelel az eladók egy piacon történő viselkedésének (mindegyikük módosítja stratégiáját a versenytársak cselekedeteinek megfelelően). A *2. ábrának* megfelelően a játékosok legjobbválasz-sorozata tetszőleges $q_2^{(0)}$ kezdeti stratégia mellett most egy egyensúlyi helyzethez tart. Mindenesetre kiemeljük, hogy a legjobbválasz-sorozat általában nem szükségképpen tart egy Nash-egyensúlyponthoz.

2. ábra: *A Cournot-duopólium*



3. A Bertrand-duopólium

Egy másik kétszemélyes játék, ami piaci árképzést modellez, a Bertrand-duopólium (1883).
Tekintsünk két vállalatot, *I-t* és *II*-t, amelyek *A* és *B* termékeket állítanak elő értelemszerűen. Itt a játékosok termékárakat és saját stratégiákat választanak. Tegyük fel, hogy az *I* vállalat az egységárakat c_1-nek, míg a *II* vállalat c_2-nek deklarálja.

Az árak kiszabásának következtében a piacon minden egyes termékre megállapítható a kereslet, azaz $Q_1(c_1, c_2) = q - c_1 + kc_2$ és $Q_2(c_1, c_2) = q - c_2 + kc_1$. A q szimbólum egy kezdeti igényt jelöl, és a k együttható az *A* és *B* termékek felcserélhetőségének felel meg.

A Cournot-modellel való analógia miatt az egységköltséget jelölje c. Következésképpen a játékosok kifizető-függvényei az alábbi alakokat öltik:

$$H_1(c_1, c_2) = (q - c_1 + kc_2)(c_1 - c),\ \ H_2(c_1, c_2) = (q - c_2 + kc_1)(c_2 - c).$$

A játék a következőképpen definiálható: $\Gamma = \langle I, II, Q_1 = [0, \infty), Q_2 = [0, \infty), H_1, H_2 \rangle$.
Rögzítsük az *I* játékos c_1 stratégiáját. Ekkor a *II* játékos legjobb válasza abból a c_2 stratégiából áll, amely a maximális $\max_{c_2} H_2(c_1, c_2)$ kifizetési értéket garantálja.

Mivel a $H_2(c_1, c_2)$ átírható a $H_2(c_1, c_2) = (-1) \cdot c_2^2 + (q + kc_1 + c) \cdot c_2 = a \cdot c_2^2 + b \cdot c_2 + d$ alakba, így $H_2(c_1, c_2)$ grafikonja $a < 0$-ra konkáv parabola, csúcsa és maximuma $c_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(q+kc_1+c)}{2\cdot(-1)} = \frac{q+kc_1+c}{2}$ -ben van:

$$c_2 = \frac{1}{2}(q + kc_1 + c). \tag{3.1}$$

Ehhez hasonlóan, ha a *II* játékos c_2 startégiája rögzített, akkor az *I* játékos legjobb válasza a $\max_{c_1} H_1(c_1, c_2)$ maximális kifizetési értéket biztosító c_1 stratégia lesz. Könnyen megkapható, hogy

$$c_1 = \frac{1}{2}(q + kc_2 + c). \tag{3.2}$$

A (3.1)–(3.2) egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása:

$$c_1^* = c_2^* = \frac{q+c}{2-k} \; .$$

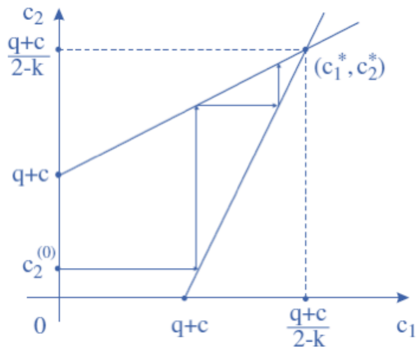
Pozitív megoldást keresünk, következésképpen $k < 2$. Az eredményül adódó c_1^*, c_2^* megoldásra a (c_1^*, c_2^*) pont – az *1. Megjegyzés*hez hasonló indoklással is belátható módon – egy Nash-egyensúlypont lesz. A *II* játékosnak a c_1^* stratégiához tartozó legjobb válasza a c_2^*, és fordítva, az *I* játékosnak a c_2^* stratégiára adott legjobb válasza a c_1^* stratégiát szolgáltatja.

A játékosoknak az egyensúlyponthoz tartozó optimális kifizetési értékét az alábbi kifejezés adja:

$$H_1^* = H_2^* = \left[\frac{q - c(1-k)}{2-k}\right]^2 .$$

A (c_1, c_2) síkon kössük össze egyenes szakaszokkal a (3.1)–(3.2) legjobb válaszokat (l. *3. ábra*). Jelöljük $R(c_1)$-gyel, illetve $R(c_2)$-vel a (3.1) és (3.2) jobb oldalait. Tetszőleges $c_2^{(0)}$ kezdeti értékre konstruáljuk meg a legjobb-válasz-sorozatot:

3. ábra: *A Bertrand-duopólium*



A *3. ábra* a következőket szemlélteti. Tetszőleges $c_2^{(0)}$ kezdeti stratégiára a legjobbválasz-sorozat a (c_1^*, c_2^*) egyensúlyponthoz tart.

4. Hotelling-duopólium (1929) (Telephelyválasztás)

Ez a Hotelling által 1929-ben bevezetett kétszemélyes játék szintén az árazási feladatok közé tartozik, de figyelembe veszi a vállalatoknak egy piacon való elhelyezkedését. Tekintsünk egy a [0, 1] egységszakasz által leírt lineáris piacot (l. *4. ábra*). Létezik két vállalat, az *I* és a *II*, amelyek az x_1 és x_2 pontokban helyezkednek el. Mindegyik vállalat ugyanarra a termékre rögzíti a saját árát (ezek értelemszerűen a c_1 és c_2 paraméterek). Ezek után minden egyes, az x pontnál elhelyezkedő fogyasztó összehasonlítja az egyes vállalatokhoz eljutás költségét, ami $L_i(x) = c_i + |x - x_i|$, $i = 1, 2$, és a kisebb költségnek megfelelőt választja. A Hotelling-modell keretein belül az $L(x)$ költség úgy interpretálható, mint a szállítási költséggel kiegészített termékár. Ugyanakkor a fogyasztók összessége két halmazra bontható szét, ezek a $[(0, x)$ és az $(x, 1)]$. Az első az *I* vállalatot preferálja, míg az utóbbi a *II* vállalatot választja. Ezeknek a halmazoknak az x határa az $L_1(x) = L_2(x)$ egyenlőségből következik:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \ . \qquad (4.1)$$

Megjegyzés. A (4.1) igazolását a *4. ábra* speciális esetére, illetve az általános esetre a *9. Függelék* és a *15. Függelék* tartalmazza.

A kifizetési értékeket a játékosok jövedelmeiként értelmezzük, azaz

$$H_1(c_1,c_2)=c_1x=c_1\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{c_2-c_1}{2}\right], \tag{4.2}$$

$$H_2(c_1,c_2)=c_2x=c_2\left[1+\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{c_2-c_1}{2}\right]. \tag{4.3}$$

4. ábra: *A Hotelling-duopólium egy szakaszon*

Egy (c_1^*, c_2^*) Nash-egyensúlypont kielégíti a $\frac{\partial H_1(c_1,c_2^*)}{\partial c_1}=0$, $\frac{\partial H_2(c_1^*,c_2)}{\partial c_2}=0$ egyenleteket. Ennélfogva

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1(c_1,c_2)}{\partial c_1}&=\frac{c_2-c_1}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_1}{2}=0,\\ \frac{\partial H_2(c_1,c_2)}{\partial c_2}&=1-\frac{c_2-c_1}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_2}{2}=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

A fenti egyenleteket összegezve adódik, hogy

$$c_1^*+c_2^*=2, \tag{4.5}$$

ami az alábbi egyensúlyi értékekhez vezet:

$$c_1^*=\frac{2+x_1+x_2}{3}\,,\quad c_2^*=\frac{4-x_1-x_2}{3}\,. \tag{4.6}$$

Az egyensúlyi árakat (4.2)–(4.3)-ba helyettesítve kapjuk az egyensúlypont kifizetéseit:

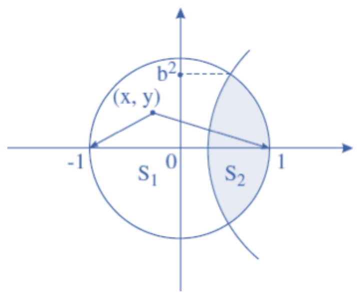
$$H_1(c_1^*, c_2^*) = \frac{[2 + x_1 + x_2]^2}{18}, \quad H_2(c_1^*, c_2^*) = \frac{[4 - x_1 - x_2]^2}{18} \qquad \text{(l. } \textit{14. Függelék}\text{).} \tag{4.7}$$

Éppúgy, mint az előző duopóliumoknál, a (4.2)–(4.3) kifizetési függvények görbéi itt is konkáv parabolák. Ennélfogva a stratégiajavítási eljárás az egyensúlyponthoz vezet. (*Megjegyzés:* a (4.2)–(4.6) részletesebb igazolását a *9.–14. Függelék* tartalmazza.)

4.1. A Hotelling-duopólium a kétdimenziós térben

Az előző eljárás abból a gondolatból indult ki, hogy a piac egy egyenes szakaszt formál. Aktuálisan egy piac a kétdimenziós tér egy halmaza. Legyen egy város egy S egységkör, amelyen a vásárlók eloszlása egyenletes (l. *5. ábra*). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az I és II vállalat a (–1, 0) és (0, 1) középpontra szimmetrikus pontokban helyezkedik el. Mindegyik vállalat egy bizonyos c_i árat jelent be, i = 1, 2. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $c_1 < c_2$.

5. ábra: *A Hotelling-duopólium 2D-ben*



Az előzőeknél hosszabb levezetéssel belátható, hogy ennek a játéknak a (c_1^*, c_2^*) Nash-féle egyensúlypontjára az egyensúlyi árak az alábbiak lesznek:

$$c_1^* = c_2^* = \frac{\pi}{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})} \approx 1{,}3685 .$$

5. A Stackelberg-duopólium

Mindeddig kétszemélyes játékokat tanulmányoztunk, ahol az opponenseknek egyenlőek a jogaik (a döntéseiket egyidejűleg hozzák). A Stackelberg-duopólium (1934) a játékosok bizonyos hierearchiáját feltételezi. Nevezetesen, az *I* játékost, aki a döntését elsőként hozza, **vezető**nek, míg a *II* játékost **követő**nek hívják.

5.1 Definíció. *Egy Γ játék Stackelberg-egyensúlypontja az olyan* (x^*, y^*) *stratégiák halmaza, amelyre a II játékosnak az* x^* *stratégiára adott legjobb válaszát jelölő* $y^* = R(x^*)$ *megoldása az alábbi feladatnak*

$$H_1\left(x^*, y^*\right) = \max_x H_1\left(x, R(x)\right).$$

Következésképpen egy Stackelberg-egyensúlypontban egy *vezető* tudja, hogy tetszőleges stratégiájára egy *követő* a legjobb választ adja, és így a vezető könnyen megtalálja a kifizetési értékét maximalizáló x^* stratégiáját.

Most elemezzük a Stackelberg-modellt a Cournot-duopóliumon belül. Van két vállalat, az *I* és *II*, amelyek ugyanazt a terméket gyártják. Az 1. lépésben az *I* vállalat bejelenti, hogy az ő termékoutputja q_1. Ezután a *II* vállalat választja meg az ő q_2 stratégiáját.

Felidézzük „*2. A Cournot-duopólium*" szakasz eredményeit: a *II* játékosnak a q_1 stratégiára adott legjobb válasza (2.10) szerint a $q_2 = R(q_1) = (p - c - q_1)/2$. Ezt tudva, az *I* játékos maximalizálja a kifizetési értékét:

$$H_1\left(q_1, R(q_1)\right) = q_1\left(p - c - q_1 - R(q_1)\right) = q_1(p - c - q_1)/2.$$

Világos módon ennek a játékosnak az optimális stratégiája az alábbiból áll:

$$q_1^* = \frac{p-c}{2} \ .$$

(*3.A Megjegyzés*:

$$-\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{p-c}{2}\cdot q_1 = a\cdot q_1^2 + b\cdot q_1 + d \quad \text{max, ha } q_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(p-c)/2}{-2(-1/2)} = \frac{p-c}{4} \cdot)$$

Ennek megfelelően a *II* játékos optimális stratégiája

$$q_2^* = \frac{p-c}{4} \quad .$$

A játékosoknak az egyensúlyi ponthoz tartozó kifizetési értékei

$$H_1^* = \frac{(p-c)^2}{8},$$
$$H_2^* = \frac{(p-c)^2}{16}.$$

Nyilvánvaló, hogy a vezető haszna kétszer akkora, mint a *követőé*.

6. Függelék a részletszámításokhoz

1. Függelék: (2.2) igazolása.

$H_1 = (p - q_1 - q_2)q_1 - cq_1 = pq_1 - q_1^2 - q_1q_2 - cq_1 = - q_1^2 + (p - c - q_2)q_1$ képe parabola.

$H_1 = - q_1^2 + (p - c - q_2)q_1 = q_1(-q_1 + p - c - q_2) = 0 \Leftrightarrow q_1 = 0$, vagy $q_1 = p - c - q_2$ a H_1 parabolának a q_1 tengellyel való metszéspontjai. Így, mivel H_1 képletében a $- q_1^2$ másodfokú tag negatív, a parabola lefele álló (konkáv) és maximuma (tengelypontja) a $q_1 = 0$ és $q_1 = p - c - q_2$ számtani közepében, azaz $\tilde{q}_1 = \frac{1}{2}(p-c-q_2)$-ben van.

(**2. Függelék**. Picit gyorsabban fog adódni ez az eredmény az alábbi összefüggésre hivatkozva:

Ha $a < 0$, akkor az $ax^2 + bx + d$ kifejezés maximális, ha $x = -\frac{b}{2a}$.

Az alábbi átalakítással $H_1 = (-1)\, q_1^2 + (p - c - q_2)q_1 = a \cdot q_1^2 + b \cdot q_1 + d$ maximális, ha

$$q_1 = -\frac{p-c-q_2}{2\cdot(-1)} = \frac{p-c-q_2}{2} \quad .)$$

3. Függelék: (2.7) igazolása.

$q_1 = q_1^*$, $q_2 = q_2^*$ helyettesítéssel (2.2) $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} q_1^* = \frac{1}{2}\left(p - c - q_2^*\right) \\ q_2^* = \frac{1}{2}\left(p - c - q_1^*\right) \end{matrix}$. Az alsó $q_2^* = \frac{1}{2}\left(p - c - q_1^*\right)$-ot felülre helyettesítve

$$q_1^* = \frac{1}{2}\left(p - c - q_2^*\right) \Leftrightarrow q_1^* = \frac{1}{2}\left\{p - c - \left[\frac{1}{2}\left(p - c - q_1^*\right)\right]\right\} \Leftrightarrow q_1^* = \frac{1}{2}\left\{p - c - \left[\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}q_1^*\right]\right\} \Leftrightarrow$$

$$q_1^* = \frac{1}{2}\left\{p - c - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}q_1^*\right\} \Leftrightarrow q_1^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}q_1^*\right) \Leftrightarrow q_1^* = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(p - c + q_1^*\right) \Leftrightarrow$$

$$q_1^* = \frac{1}{4}\left(p - c + q_1^*\right) \Leftrightarrow 4q_1^* = p - c + q_1^* \Leftrightarrow 3q_1^* = p - c \Leftrightarrow q_1^* = \frac{p-c}{3}.$$

Hasonlóan, de a q_1^* *és* q_2^* kiinduló egyenletein belüli felcserélhetőségéből is adódik, hogy $q_2^* = \frac{p-c}{3}$.

4. Függelék: (2.8) igazolása.

Tudjuk, hogy

$$q_1^* = \frac{p-c}{3}, \quad q_2^* = \frac{p-c}{3} \quad ,$$

illetve

$$H_1(q_1, q_2) = (p - q_1 - q_2)\cdot q_1 - cq_1 = (p - c - q_1 - q_2)\cdot q_1.$$

Ekkor

$$H_1(q_1^*, q_2^*) = (p - q_1^* - q_2^*)\cdot q_1^* - cq_1^* = (p - c - q_1^* - q_2^*)\cdot q_1^* = \left(p - c - \frac{p-c}{3} - \frac{p-c}{3}\right)\cdot\frac{p-c}{3} =$$

$$= \frac{p-c}{3}\cdot\frac{p-c}{3} = \frac{(p-c)^2}{9}.$$

5. Függelék: *Részletszámítások a Cournot-duopóliumhoz a „Maple"-lel.*

Tudjuk, hogy ha egy kétszer differenciálható $f(x)$ függvényre $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor f-nek $x=x_0$ helyen lokális maximuma van.

A (2.2) igazolása a Maple-lel:

> **diff**((p–q1–q2)*q1–c*q1, q1); # megadja a $\frac{\partial}{\partial q_1}\left[(p\text{-}q_1\text{-}q_2)q_1\text{-}c\cdot q_1\right]$ deriváltat.

$$-2q_1+p-q_2-c$$

> **solve**(–2*q1+p–q2–c = 0, q1);

$$\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q_2-\frac{1}{2}c$$

Ez a (2.2) 1. egyenlete jobb oldala, így az 1. egyenlet:

$$q_1=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q_2-\frac{1}{2}c\,. \tag{6.1}$$

Hasonlóan adódik (2.2) 2. egyenlete:

$$q_2=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q_1-\frac{1}{2}c\,. \tag{6.2}$$

6. Függelék: A (2.7) igazolása Maple-lel: A Cournot-egyensúlypont a (6.1)–(6.2) egyenletrendszer megoldásaként adódik:

> **solve**({q1=1/2*p–1/2*q2–1/2*c, q2=1/2*p–1/2*q1–1/2*c}, {q1,q2});

$$\left\{q_1=\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}c,\ q_2=\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}c\right\}.$$

7. Függelék: A (2.8) igazolása a Maple-lel: Helyettesítsük az előző sorból $q_1 = q_2 = \frac{p-c}{3}$-t (1.2)-be a subs paranccsal, majd a kapott % eredményt egyszerűsítsük a simplify paranccsal:

> **subs**({q1=1/3*p–1/3*c,q2=1/3*p–1/3*c},(p–q1–q2)*q1–c*q1);

$$\left(\frac{1}{3}p+\frac{2}{3}c\right)\left(\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}c\right)-c\left(\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}c\right)$$

> **simplify**(%);

$$\frac{1}{9}p^2 - \frac{2}{9}pc + \frac{1}{9}c^2.$$

Eszerint (és ehhez hasonlóan) az *I* játékos (*II* játékos) kifizetőfüggvényének maximuma a $q_1 = q_2 = \dfrac{p-c}{3}$ Cournot-egyensúlypontban

$$H_1(q_1, q_2) = H_2(q_1, q_2) = \frac{1}{9}(p^2 - 2pc + c^2) = \frac{1}{9}(p-c)^2. \qquad \text{[L. (2.8)]}$$

A számítások nehezebb része általában is legfeljebb néhány Maple-utasítással elvégeztethető. Esetünkben a (2.2) megkapásához elég a diff (deriválási) és solve (egyenletet, egyenletrendszert megoldó) parancs ismerete. A két játékos kifizető- (profit) és legjobbválasz- (reakció) függvényeinek *1. ábrájához* pedig elég ismerni csupán csak az implicitplot parancsot.

8. Függelék: *Az 1. ábra (Cournot-duopólium) előállítása Maple-ben az implicitplot, with(plots), display parancsokkal*:

Állítsuk elő a (2.2)-beli függvények közül az $(1-q_1-q_2)q_1 - \frac{1}{2}\, q_1 = C_1$ egyenletű 1. kifizetőfüggvény ábráját mondjuk abra1 néven, de helyet kímélendően egyelőre ne rajzoltassuk ki (az [:=] értékadásra szolgál, míg a lezáró [:] az ábra kirajzolását nyomja el).

> abra1:= contourplot(q1*(–q1–q2+1)–.5*q1, q1 = 0…3, q2 = 0…3, axes=normal, contours=20, color=black, thickness=2):

Teljesen hasonlóan hozhatjuk létre a (2.9) többi kifejezéseinek, azaz az $(1-q_1-q_2)q_2 - \frac{1}{2}q_2$, $q_1 + \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{4}$, $q_2 + \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{4}$ kifejezéseknek az ábráit, abra2–abra4 néven:

> abra2:= contourplot((1–q1–q2)*q2–q2/2, q1 = 0…3, q2 = 0…3, axes=normal, contours=20, color=red, thickness=2):

> abra3:= implicitplot(q1+q2/2–1/4, q1 = 0…3, q2 = 0…3, color=blue, thickness=3):

> abra4:= implicitplot(q2+q1/2–1/4, q1 = 0…3, q2 = 0…3, color=green, thickness=3):

Most rajzoltassuk ki az abra1–abra4 ábrákat egy közös ábrán a display paranccsal alább:

display({abra1,abra2,abra3,abra4}); # A parancs eredményeként az *1. ábra* adódik.

A (4.1)–(4.6) összefüggések részletesebb igazolását az alábbi *9.–14. Függelék*ek tartalmazzák.

9. Függelék: (4.1)–(4.6) igazolása.

$L_i(x) = c_i + |x - x_i|$, $i = 1, 2$. Így $L_1(x) = c_1 + |x - x_1| = c_1 + x - x_1$, hiszen a *4. ábráról* $x \geq x_1$.

Hasonlóképpen adódik az, hogy

$$L_2(x) = c_2 + |x_2 - x| = c_2 + x_2 - x.$$

Ezek szerint

$$L_1(x) = L_2(x) \Leftrightarrow c_1 + x - x_2 = c_2 + x_2 - x \Leftrightarrow 2x = x_1 + x_2 + c_2 - c_1 \Leftrightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \qquad \text{[L.(4.1)]}$$

10. Függelék: (4.4) elemi levezetése deriválás nélkül.

$$H_1(c_1, c_2) = c_1\left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2}\right] = -\frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + c_2)c_1 = a \cdot c_1^2 + b \cdot c_1 + d$$

maximális, ha

$$c_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(x_1 + x_2 + c_2)/2}{2(-1/2)} = \frac{x_1 + x_2 + c_2}{2} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + c_2 - 2c_1}{2} = 0,$$

ami ekvivalens a $\frac{\partial H_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = 0$ feltétellel.

11. Függelék: (4.4) igazolása deriválás nélkül:

(4.2) szerint $H_1(c_1, c_2) = c_1\left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + c_2)c_1 = a \cdot c_1^2 + b \cdot c_1 + d$ maximális a **2. Függelék** szerint, ha

$$c_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(x_1 + x_2 + c_2)/2}{2(-1/2)} = \frac{x_1 + x_2 + c_2}{2} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + c_2 - 2c_1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{c_2 - c_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{c_1}{2} = 0 \Rightarrow$$

(4.3) 1. egyenlete. A 2. ugyanígy adódik.

12. Függelék: (4.4) igazolása deriválással:

$$H_1(c_1,c_2)=c_1\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{c_2-c_1}{2}\right]=-\frac{1}{2}c_1^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2+c_2)\cdot c_1 \text{ miatt}$$

$$\frac{\partial H_1(c_1,c_2)}{\partial c_1}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial c_1}\left[-\frac{1}{2}c_1^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2+c_2)c_1\right]=\frac{\partial}{\partial c_1}\left[-\frac{1}{2}c_1^2\right]+\frac{\partial}{\partial c_1}\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2+c_2)c_1\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c_1}\left[c_1^2\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c_1}\left[(x_1+x_2+c_2)c_1\right]=-\frac{1}{2}2c_1+\frac{1}{2}(x_1+x_2+c_2)=\frac{1}{2}\left[-2c_1+(x_1+x_2+c_2)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2c_1+x_1+x_2+c_2\right]=\frac{1}{2}\left[-c_1-c_1+x_1+x_2+c_2\right]=\frac{1}{2}\left[c_2-c_1+x_1+x_2-c_1\right]=\frac{c_2-c_1}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_1}{2}.$$

Ennélfogva $\frac{\partial H_1(c_1,c_2)}{\partial c_1}=0 \Leftrightarrow \frac{c_2-c_1}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_1}{2}=0$, ami éppen (4.4)-nek az 1. egyenlete.

Hasonlóan adódik (4.4)-nek a 2. egyenlete is, így a (c_1^*, c_2^*) pontra valóban fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\frac{c_2^*-c_1^*}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_1^*}{2}&=0,\\ 1-\frac{c_2^*-c_1^*}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_2^*}{2}&=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Összeadva az előző két egyenletet: $1-\frac{c_1^*}{2}-\frac{c_2^*}{2}=0 \Rightarrow \frac{c_1^*}{2}+\frac{c_2^*}{2}=1 \Rightarrow c_1^*+c_2^*=2$, ami épp (4.5).

13. Függelék: (4.6) igazolása:

(4.4)-ből c_2^*-ra $c_2^* = 2 - c_1^*$ adódik, amit (4.4) 1. egyenletbe írva, $\frac{c_2^*-c_1^*}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_1^*}{2}=0$ -ba:

$$\frac{2-c_1^*-c_1^*}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_1^*}{2}=0 \Rightarrow \frac{2-2c_1^*+x_1+x_2-c_1^*}{2}=0 \Rightarrow 2-3c_1^*+x_1+x_2=0 \Rightarrow$$

$$3c_1^*=2+x_1+x_2 \Rightarrow c_1^*=\frac{2+x_1+x_2}{3},$$

ami (4.6)-nak 1. egyenlete.

$c_1^*=\frac{2+x_1+x_2}{3}$ -ot beírva (4.4) 2. egyenletébe, $1-\frac{c_2^*-c_1^*}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_2^*}{2}=0$ -ba:

$$\frac{2}{2}-\frac{c_2^*-\frac{2+x_1+x_2}{3}}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{c_2^*}{2}=0 \Rightarrow 2-\left(c_2^*-\frac{2+x_1+x_2}{3}\right)-(x_1+x_2)-c_2^*=0 \Rightarrow$$

$$2-c_2^*+\frac{2+x_1+x_2}{3}-(x_1+x_2)-c_2^*=0 \Rightarrow 2c_2^*=2+\frac{2+x_1+x_2}{3}-x_1-x_2 \Rightarrow$$

$$2c_2^*=\frac{6+2+x_1+x_2-3x_1-3x_2}{3} \Rightarrow 2c_2^*=\frac{8-2x_1-2x_2}{3} \Rightarrow c_2^*=\frac{4-x_1-x_2}{3}$$ a (4.6) 2. egyenlete.

14. Függelék: (4.7) igazolása:

Pl. (4.6)-nak megfelelően $c_1^*=\frac{2+x_1+x_2}{3}$, $c_2^*=\frac{4-x_1-x_2}{3}$. Így (4.2) szerint

$H_1(c_1,c_2)=c_1\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{c_2-c_1}{2}\right]$-ből következően $H_1^*=H_1(c_1^*,c_2^*)$-ra.

$$H_1^*=c_1^*\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{c_2^*-c_1^*}{2}\right]=\frac{2+x_1+x_2}{3}\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{\frac{4-x_1-x_2}{3}-\frac{2+x_1+x_2}{3}}{2}\right]=$$

$$=\frac{2+x_1+x_2}{3}\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{\frac{2-2x_1-2x_2}{3}}{2}\right]=\frac{2+x_1+x_2}{3}\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1-x_1-x_2}{3}\right]=$$

$$=\frac{2+x_1+x_2}{3}\cdot\frac{3x_1+3x_2+2-2x_1-2x_2}{6}=\frac{2+x_1+x_2}{3}\cdot\frac{x_1+x_2+2}{6}=\frac{(2+x_1+x_2)^2}{18}$$ lásd (4.7).

15. Függelék feladata: *Állítsuk elő zárt alakban a* $q_2^{(n)}$, $q_2^{(n)}$ *sorozatot (2.10A–2.11)-ből, ahol*

$$q_1 = R(q_2) = \frac{1}{2}(p-c-q_2) \text{ és } q_2 = R(q_1) = \frac{1}{2}(p-c-q_1), \tag{6.3}$$

valamint $q_2^{(0)}$ *rögzített állandó, illetve*

$$q_1^{(n)} = R\left(q_2^{(n-1)}\right),\ q_2^{(n)} = R\left(q_1^{(n)}\right),\ n = 1, 2, \ldots \tag{6.4}$$

Az $\alpha = \dfrac{p-c}{2}$ jelöléssel (6.3) és (6.4) az alábbi alakba írható át:

$$q_1 = R(q_2) = \alpha - \frac{1}{2}q_2,\ q_2 = R(q_1) = \alpha - \frac{1}{2}q_1. \tag{6.5}$$

Először állítsuk elő a legjobb válaszokat n = 1, 2, 3-ra, hogy sejthessük, hogyan függenek n-től. (6.4)-ből rendre n=1, n=1, n=2, n=2, n=3, n=3 helyettesítéssel adódnak az alábbi kifejezések:

$$q_1^{(1)} = R\left(q_2^{(0)}\right) = \alpha - \frac{1}{2}q_2^{(0)}. \tag{6.6A}$$

$$\begin{aligned} q_2^{(1)} &= R\left(q_1^{(1)}\right) = \alpha - \frac{1}{2}q_1^{(1)} = \alpha - \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}q_2^{(0)}\right) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2^2}q_2^{(0)} = \\ &= \alpha\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2}q_2^{(0)} == \alpha\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2}q_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{6.6B}$$

$$\begin{aligned} q_1^{(2)} &= R\left(q_2^{(1)}\right) = \alpha - \frac{1}{2}q_2^{(1)} = \alpha - \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2}q_2^{(0)}\right] = \alpha - \frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^3}q_2^{(0)} = \\ &= \alpha\left[1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2^3}q_2^{(0)} = \alpha\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) - \frac{1}{2^3}q_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{6.6C}$$

$$\begin{aligned} q_2^{(2)} &= R\left(q_1^{(2)}\right) = \alpha - \frac{1}{2}q_1^{(2)} = \alpha - \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) - \frac{1}{2^3}q_2^{(0)}\right] = \\ &= \alpha - \frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^4}q_2^{(0)} = \alpha\left[1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\right] + \frac{1}{2^4}q_2^{(0)} = \\ &= \alpha\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{2^4}q_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{6.6D}$$

$$q_1^{(3)} = R\left(q_2^{(2)}\right) = \alpha - \frac{1}{2} q_2^{(2)} = \alpha - \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{2^4} q_2^{(0)}\right] =$$

$$= \alpha - \frac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}\right) - \frac{1}{2^5} q_2^{(0)} = \alpha\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}\right)\right] - \frac{1}{2^5} q_2^{(0)} = \tag{6.6E}$$

$$= \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) - \frac{1}{2^5} q_2^{(0)}.$$

$$q_2^{(3)} = R\left(q_1^{(3)}\right) = \alpha - \frac{1}{2} q_1^{(3)} = \alpha - \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) - \frac{1}{2^5} q_2^{(0)}\right] =$$

$$= \alpha - \frac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) + \frac{1}{2^6} q_2^{(0)} = \alpha\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)\right] + \frac{1}{2^6} q_2^{(0)} = \tag{6.6F}$$

$$= \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}\right) + \frac{1}{2^6} q_2^{(0)}.$$

A (6.6A)–(6.6F)-re tekintettel a sejtésünk az, hogy

$$\begin{aligned} q_1^{(n)} &= R\left(q_2^{(n-1)}\right) = \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2n-2}}{2^{2n-2}}\right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)}, \\ q_2^{(n)} &= R\left(q_1^{(n)}\right) = \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2^{2n-1}}\right) + \frac{1}{2^{2n}} q_2^{(0)},\ n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Lássuk be matematikai indukcióval, hogy (6.7) fennáll.

1. eset. Legyen n=1. Ekkor (6.7) és (6.4) szerint

$$q_1^{(1)} = \alpha \cdot 1 - \frac{1}{2^{2\cdot 1-1}} q_2^{(0)} = \alpha - \frac{1}{2} q_2^{(0)} = R\left(q_2^{(0)}\right)\ . \tag{6.8}$$

Szintén (6.7) és (6.4) szerint

$$q_2^{(1)} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2} q_2^{(0)} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4} q_2^{(0)} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{-2}{4} \cdot \frac{-1}{2} q_2^{(0)} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} q_2^{(0)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\alpha - \frac{1}{2} q_2^{(0)}\right) = -\frac{1}{2}\left[-2\alpha + \left(\alpha - \frac{1}{2} q_2^{(0)}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(-2\alpha + R(q_2^{(0)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2\alpha + q_1^{(1)}\right) = \alpha - \frac{1}{2} q_1^{(1)} = R\left(q_1^{(1)}\right).$$

2. eset. Tegyük fel, hogy $n=k$ rögzített értékre, ahol k pozitív egész, fennáll (6.7), azaz teljesül

$$\begin{aligned} q_1^{(k)} &= R\left(q_2^{(k-1)}\right) = \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2k-2}}{2^{2k-2}}\right) - \frac{1}{2^{2k-1}} q_2^{(0)}, \\ q_2^{(k)} &= R\left(q_1^{(k)}\right) = \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2k-1}}{2^{2k-1}}\right) + \frac{1}{2^{2k}} q_2^{(0)}, \ n = 1,2,\ldots\ . \end{aligned} \tag{6.9}$$

(6.9)-ből és (6.4)-ből

$$\begin{aligned} q_1^{(k+1)} &= R\left(q_2^{(k)}\right) = \alpha - \frac{1}{2} q_2^{(k)} = \alpha - \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2k-1}}{2^{2k-1}}\right) + \frac{1}{2^{2k}} q_2^{(0)}\right] = \\ &= \alpha - \frac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2k-1}}{2^{2k-1}}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2k}} q_2^{(0)} = \\ &= \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2k}}{2^{2k}}\right) - \frac{1}{2^{2k+1}} q_2^{(0)} = \\ &\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2(k+1)-2}}{2^{2(k+1)-2}}\right) - \frac{1}{2^{2(k+1)-1}} q_2^{(0)}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

vagyis (6.7) első állítása fennáll $n = k+1$-re is. Hasonlóan igazolhatjuk (6.7) második egyenlőségét. (6.9)-ből, (6.10)-ből és (6.4)-ből

$$q_2^{(k+1)} = R\left(q_1^{(k+1)}\right) = \alpha - \frac{1}{2} q_1^{(k+1)} = \alpha - \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2(k+1)-2}}{2^{2(k+1)-2}}\right) + \frac{1}{2^{2(k+1)-1}} q_2^{(0)}\right] =$$

$$= \alpha - \frac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2k}}{2^{2k}}\right) - \frac{1}{2^{2(k+1)}} q_2^{(0)} =$$

$$= \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2k+1}}{2^{2k+1}}\right) - \frac{1}{2^{2(k+1)}} q_2^{(0)} =$$

$$\alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2(k+1)-1}}{2^{2(k+1)-1}}\right) - \frac{1}{2^{2(k+1)}} q_2^{(0)},$$

vagyis (6.7) második állítása is fennáll $n = k+1$-re is.

A *15. Függelék* feladatának igazolásához hátra van még a $q_n^{(1)}$, $q_n^{(2)}$ zárt alakra hozása. Ehhez fel fogjuk használni a mértani sorozat alábbi összegképletét:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^m = \sum_{i=0}^{m} a_1 q^i = \frac{a_1\left(q^{m+1} - 1\right)}{q - 1}, \text{ ha } q \neq 1. \tag{6.11}$$

(6.7)-ből és (6.11)-ből

$$q_1^{(n)} = \alpha\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2n-2}}{2^{2n-2}}\right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)} = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{2n-2} 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^i - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)} =$$

$$= \alpha \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{(2n-2)+1} - 1}{\frac{-1}{2} - 1} - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)} = \alpha \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - 1}{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)} =$$

$$= \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{(-1)^{2n}}{2^{2n-1}} + 1\right] - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)} = \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + 1\right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)} =$$

$$= \frac{p-c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + 1\right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)} = \frac{p-c}{3} . \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + 1\right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)}.$$

Innen adódik, hogy az első legjobb válaszsorozat:

$$q_1^{(n)} = \frac{p-c}{3} . \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + 1 \right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)}. \tag{6.12}$$

Hasonlóan adódik $q_2^{(n)}$:

$$q_2^{(n)} = \frac{p-c}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) + \frac{1}{2^{2n}} q_2^{(0)}. \tag{6.13}$$

Lássuk ezt is be. (6.7) második képletének része:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2^{2n-1}} = \sum_{i=0}^{2n-1} 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{2n-1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{-1}{2} \right)^{(2n-1)+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{-1}{2} \right)^{2n} - 1}{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right).$$

Ezt is felhasználva (6.7)-ből adódik, hogy

$$q_2^{(n)} = R\left(q_1^{(n)}\right) = \alpha \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - + \cdots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2^{2n-1}} \right) + \frac{1}{2^{2n}} q_2^{(0)} = \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) + \frac{1}{2^{2n}} q_2^{(0)} =$$

$$= \frac{p-c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) + \frac{1}{2^{2n}} q_2^{(0)} = \frac{p-c}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) + \frac{1}{2^{2n}} q_2^{(0)}.$$

Tehát (6.13) valóban fennáll.

Vizsgáljuk meg a $q_1^{(n)}$, $q_2^{(n)}$ legjobb válaszok sorozatának konvergenciáját, monotonitását, illetve ha kell, tegyünk a feladat természetének megfelelő további feltételeket a paraméterekre.

16. Függelék feladata: *Igazoljuk, hogy a* $q_2^{(0)}$, *p és c paraméterek tetszőleges rögzített értékére a* $q_1^{(n)}$, $q_2^{(n)}$ *legjobbválaszok-sorozata egyaránt* $\frac{p-c}{3}$ *-hoz, a Nash-féle egyensúlyponthoz tart.*

Igazolás. Ismeretes, hogy a q^n geometriai sorozat konvergens és 0-hoz tart, ha $|q| < 1$ és $n \to \infty$. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0\,. \tag{6.14}$$

A határértékekre vonatkozó megfelelő tételekre hivatkozva fennállnak az alábbiak:

$$\frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{2}{2^{2n}} = \frac{2}{\left(2^2\right)^n} = \frac{2}{4^n} = 2\frac{1}{4^n} = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0, \text{ illetve } \frac{1}{2^{2n}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0, \text{ ha } n \to \infty\ .$$

Így (6.12)-ből

$$\lim_{n \to \infty} q_1^{(n)} = \lim_{n \to \infty}\left[\frac{p-c}{3}\cdot\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)}\right] =$$

$$= \frac{p-c}{3}\left(\lim_{n \to \infty}\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right) - q_2^{(0)}\cdot \lim_{n \to \infty}\frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{p-c}{3}(0+1) - q_2^{(0)}\cdot 0 = \frac{p-c}{3}.$$

Hasonlóan (6.13)-ból

$$\lim_{n \to \infty} q_2^{(n)} = \lim_{n \to \infty}\left[\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right) + \frac{1}{2^{2n}} q_2^{(0)}\right] =$$

$$= \frac{p-c}{3}\left(1-\lim_{n \to \infty}\frac{1}{2^{2n}}\right) + q_2^{(0)}\cdot \lim_{n \to \infty}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{p-c}{3}(1-0) - q_2^{(0)}\cdot 0 = \frac{p-c}{3}.$$

17. Függelék feladata: *Igazoljuk, hogy a* $q_1^{(n)}$, $q_2^{(n)}$, $n = 1, 2 \ldots$ *legjobbválaszok-sorozata akkor és csak akkor nem-negatív, ha*

$$\left|q_2^{(0)}\right| \le p-c. \tag{6.15}$$

A (6.12)-ből következően $n = 1, 2 \ldots$ mellett $q_1^{(n)} = \frac{p-c}{3}\cdot\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right) - \frac{1}{2^{2n-1}} q_2^{(0)}$, és így

$$q_1^{(n)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{p-c}{3}.\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right)-\frac{1}{2^{2n-1}}q_2^{(0)} \geq 0 \;\; \frac{p-c}{3}.\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right)-\frac{1}{2^{2n-1}}q_2^{(0)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}}q_2^{(0)} \leq \frac{p-c}{3}.\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right) \Leftrightarrow \tag{6.16}$$

$$q_2^{(0)} \leq \frac{p-c}{3}\left(1+2^{2n-1}\right),\; n=1,2,\dots\,.$$

$q_1^{(n)}$-hez hasonlóan (6.13)-ból $n = 1, 2 \dots$-re $q_2^{(n)} = \frac{p-c}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)+\frac{1}{2^{2n}}q_2^{(0)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{2n}}q_2^{(0)} \geq -\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right) \Leftrightarrow q_2^{(0)} \geq -\frac{p-c}{3}\cdot\left(2^{2n}-1\right) \Leftrightarrow q_2^{(0)} \geq \frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right) \Leftrightarrow ,$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right) \leq q_2^{(0)},$$

azaz

$$\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right) \leq q_2^{(0)},\; n = 1, 2 \dots \tag{6.17}$$

(6.15) és (6.16) összefoglalóan úgy fogalmazható meg, hogy

$$n = 1, 2 \dots\text{-re } [\, q_1^{(n)} \geq 0 \textbf{ és } q_2^{(n)} \geq 0 \,] \Leftrightarrow \frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right) \leq q_2^{(0)} \leq \frac{p-c}{3}\left(1+2^{2n-1}\right). \tag{6.18}$$

Így n=1-re $\frac{p-c}{3}\cdot(-3) \leq q_2^{(0)} \leq \frac{p-c}{3}(1+2) \Leftrightarrow -(p-c) \leq q_2^{(0)} \leq p-c \Leftrightarrow |p-c| \leq q_2^{(0)}$ [l. (6.15)].

Hátra van még annak bizonyítása, hogy ha $|p-c| \leq q_2^{(0)} \Leftrightarrow -(p-c) \leq q_2^{(0)} \leq p-c$, akkor (6.18) fennáll n=1, 2…-re is.

Tudjuk, hogy a 2^{2n} sorozat monoton növekszik, így -2^{2n} fogy, tehát $\left(1-2^{2n}\right)$ is fogy, ezért, mivel $p > c$-ből következően $p - c > 0$ miatt $\frac{p-c}{3} > 0$ is teljesül, így $\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right)$ is monoton fogyó $n = 1, 2 \dots$-re, azaz

$$\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right) \leq \frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2\cdot 1}\right) = \frac{p-c}{3}\cdot(-3) = -(p-c)\,.$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right)\le -(p-c),\ \text{ahol } n=1,2\ldots. \qquad (6.19)$$

A $p > c$ miatt $\frac{p-c}{3}\left(1+2^{2n-1}\right)$ monoton nő, azaz $\frac{p-c}{3}\left(1+2^{2\cdot 1-1}\right)\le\frac{p-c}{3}\left(1+2^{2n-1}\right)$, tehát

$$p-c\le\frac{p-c}{3}\left(1+2^{2n-1}\right),\ \text{ahol } n=1,2\ldots. \qquad (6.20)$$

(6.15)-ből, (6.19)-ből és (6.20)-ból összefoglalóan azt kaptuk, hogy ha $\left|q_2^{(0)}\right|\le p-c \Rightarrow -(p-c)\le q_2^{(0)}\le p-c\Rightarrow$

$\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right)\le -(p-c)\le q_2^{(0)}\le p-c\le\frac{p-c}{3}\left(1+2^{2n-1}\right)$, így az alábbi (6.21) szerint (6.18) fennáll:

$$\frac{p-c}{3}\cdot\left(1-2^{2n}\right)\le q_2^{(0)}\le\frac{p-c}{3}\left(1+2^{2n-1}\right). \qquad (6.21)$$

Ezek szerint valóban fennáll a *17. Függelék állítása*, vagyis a $q_1^{(n)}$, $q_2^{(n)}$, $n = 1, 2\ldots$ legjobbválaszok-sorozata akkor és csak akkor nemnegatív, ha

$$\left|q_2^{(0)}\right|\le p-c\,.\ \text{[L. (6.15)].}$$

Tegyük fel, ahogy elvárható, hogy $0\le q_2^0\le p-c$. Ebből és (6.15)-ből következik, hogy $q_2^{(0)}\ge 0$, valamint $n = 1, 2\ldots$-re $q_1^{(n)}\ge 0$ és $q_2^{(n)}\ge 0$.

Megjegyzés. Mivel (6.15) q_2^0 -t úgy választjuk, hogy $-(p-c)\le q_2^0<0$, akkor $-(p-c)\le q_2^0\le(p-c)$, azaz (6.15) továbbra is teljesül, így $n = 1, 2\ldots$-re a legjobb válaszok $q_1^{(n)}$, $q_2^{(n)}$ sorozata annak ellenére nemnegatív, hogy a kiindulási érték $q_2^{(0)}<0$.

Térjünk most át a monotonitásvizsgálatra.

18. Függelék feladata. *Igazoljuk, hogy monotonitás szempontjából a következő három eset lehetséges:*

1. ESET. *Ha* $q_2^{(0)}=\frac{p-c}{3}$*, akkor* $q_1^{(n)}\equiv q_2^{(n)}=\frac{p-c}{3}$, *$n = 1, 2\ldots$-re.*

2. ESET. *Ha* $q_2^{(0)} < \frac{p-c}{3}$, *akkor* $q_1^{(n)}\left(q_2^{(n)}\right)$ *szigorúan monoton fogy (nő) n = 1, 2 . . .-re.*

3. ESET. *Ha* $q_2^{(0)} > \frac{p-c}{3}$, *akkor* $q_1^{(n)}\left(q_2^{(n)}\right)$ *szigorúan monoton nő (fogy) n = 1, 2 . . .-re.*

Igazolás. (6.12) szerint

$$q_1^{(n)} = \frac{p-c}{3}\cdot\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right)-\frac{1}{2^{2n-1}}q_2^{(0)} = \frac{p-c}{3}+\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{p-c}{3}-q_2^{(0)}\right) \Rightarrow$$

$q_1^{(n)} = \frac{p-c}{3}+\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{p-c-3q_2^{(0)}}{3}\right)$ szigorúan monoton fogy (nő) akkor és csak akkor, ha

$$p-c-3q_2^{(0)} > 0 \ (< 0) \Leftrightarrow q_2^{(0)} < \frac{p-c}{3}.$$

$q_1^{(n)} = \frac{p-c}{3}+\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{p-c-3q_2^{(0)}}{3}\right)$ -be behelyettesíthetjük a $q_2^{(0)} = \frac{p-c}{3}$ kifejezést:

$$q_1^{(n)} = \frac{p-c}{3}+\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\frac{p-c-(p-c)}{3}\right] \equiv \frac{p-c}{3}.$$

A $q_1^{(n)}$-éhez hasonlóan adódik a *18. Függelék* $q_2^{(n)}$-re vonatkozó állításának helyessége.

(*Megjegyzés.* Az előbb kihasználtuk, hogy ha *n* nő $\Rightarrow 2^{2n-1}$ sz.m.nő $\Rightarrow \frac{1}{2^{2n-1}}$ sz.m.fogy $\Rightarrow$

$$\left(\frac{p-c-3q_2^{(0)}}{3}\right)\cdot\frac{1}{2^{2n-1}} \text{ sz.m.fogy, ha } p-c-3q_2^{(0)} > 0,$$

ahonnan

$$q_1^{(n)} = \frac{p-c}{3}+\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{p-c-3q_2^{(0)}}{3}\right) \text{ sz.m.fogyása már következik.}$$

19. Függelék. A Hotelling-duopólium általános tárgyalása. *Tekintsük a 4. pontban a Hotelling-duopóliummal kapcsolatban bevezetett*

$$L_i(x) = c_i + |x-x_i|,\ \ i = 1, 2 \tag{6.22}$$

függvényeket, amelyeket szállítási költségekkel kiegészített termékárnak tekintettünk. Feltehető, hogy a $c_i > 0$, $x_i \geq 0$ *paraméterek rögzítettek és* $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1$.

Oldjuk meg x-re vonatkozóan általánosan, a paraméterek függvényében, a 4. pontnak a Hotelling-duopóliummal kapcsolatos közvetlen és közvetett alábbi egyenleteit és egyenlőtlenségeit:

$$L_1(x) = L_2(x),\ L_1(x) < L_2(x),\ L_1(x) > L_2(x).$$

(Az $L_1(x) < L_2(x)$ $[L_1(x) > L_2(x)]$ esetben az x-beli vásárló az I (II) vállalatot preferálja.)

A1–A3) eset. Tegyük fel, hogy $0 \leq x_1 = x_2 \leq 1$. Ekkor $L_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ definíciója miatt

$$\begin{aligned} &L_1(x) < L_1(x) \Leftrightarrow c_1 < c_2 \Leftrightarrow \text{a vásárló az } I\text{-et preferálja} \\ &L_1(x) = L_1(x) \Leftrightarrow c_1 = c_2 \Leftrightarrow \text{a vásárló az } I, II\text{-t is preferálja} \\ &L_1(x) > L_1(x) \Leftrightarrow c_1 > c_2 \Leftrightarrow \text{a vásárló a } II\text{-t preferálja.} \end{aligned} \tag{6.23}$$

B) eset. Tegyük fel, hogy $0 \leq x_1 < x_2 \leq$ és

$$L_1(x) = L_2(x). \tag{6.24}$$

Ekkor (6.22) szerint

$$c_1 + |x - x_1| = c_2 + |x - x_2| \Leftrightarrow c_1 - c_2 + |x - x_1| - |x - x_2| = 0.$$

Az $f(x) = c_1 - c_2 + |x - x_1| - |x - x_2|$ függvény bevezetésével (6.24) miatt

$$L_1(x) = L_2(x) \Leftrightarrow f(x) = 0. \tag{6.25}$$

Az abszolút érték definíciója és geometriai tulajdonsága alapján az alábbi 3 esetet különböztethetjük meg:

Legyen $0 \leq x \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Ekkor $|x - x_1| = x_1 - x$ és $|x - x_2| = x_2 - x \Rightarrow$

$$|x - x_1| - |x - x_2| = x_1 - x - (x_2 - x) = x_1 - x_2. \tag{6.26}$$

Legyen $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ és $x_1 \leq x \leq x_2$. Ekkor $|x - x_1| = x - x_1$ és $|x - x_2| = x_2 - x \Rightarrow$

$$|x - x_1| - |x - x_2| = x - x_1 - (x_2 - x) = 2x - x_1 - x_2. \tag{6.27}$$

Legyen $0 \leq x_1 < x_2 \leq x \leq 1$. Ekkor $|x - x_1| = x - x_1$ és $|x - x_2| = x - x_2 \Rightarrow$

$$|x - x_1| - |x - x_2| = x - x_1 - (x - x_2) = - x_1 + x_2. \tag{6.28}$$

(6.25)–(6.28) miatt

$$f(x) = c_1 - c_2 + |x - x_1| - |x - x_2| = \begin{cases} c_1 - c_2 + x_1 - x_2, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq x_1 \\ c_1 - c_2 - x_1 - x_2 + 2x, & \text{ha} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ c_1 - c_2 - x_1 + x_2, & \text{ha} \quad x_2 \leq x \leq 1 \end{cases}. \tag{6.29}$$

Minthogy az $|x|$ függvény minden x-re folytonos, így (6.29)-ben $f(x)$ is az. (6.29)-ből következik, hogy $f(x)$ a $[0, x_1]$-en konstans, $[x_1, x_2]$-n szigorúan monoton nő, és $[x_2, 1]$-en is konstans, azaz

$$f(x) \text{ a } [0, 1]\text{-en összességében monoton növekedő.} \tag{6.30}$$

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet a megfelelő három szakaszon külön-külön.

B1) eset. Legyen $0 \leq x \leq 1$. Tegyük fel, hogy $f(0) = c_1 - c_2 + x_1 - x_2 > 0$. Ekkor, mivel (6.30) szerint $f(x)$ a monoton növő, innen $x \geq 0$ miatt $f(x) \geq f(0) > 0$ következik. Ennélfogva az $f(x) = 0$ egyenletnek a $[0, 1]$-en nincsen megoldása. Ugyanakkor fennáll, hogy $f(x) > 0$, azaz $c_1 - c_2 + |x - x_1| - |x - x_2| > 0 \Rightarrow c_1 + |x - x_1| > c_2 + |x - x_2| \Rightarrow$ $L_1(x) > L_2(x)$, vagyis a vásárló akármelyik x pontban is helyezkedik el a $[0, 1]$ szakaszon, a *II*-es vállalatot részesíti előnyben, hiszen a szállítási költséggel bővített ár az $L_2(x)$-re lesz a kisebb.

B2–B4) eset. Legyen $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ és $0 \leq x \leq 1$, továbbá $f(0) = c_1 - c_2 + x_1 - x_2 = 0$. Ebben az esetben (6.29)–(6.30) miatt $0 \leq x \leq x_1 < x_2 \leq 1$-re $f(x) = c_1 - c_2 + |x - x_1| - |x - x_2| \equiv 0$, ahonnan $L_1(x) \equiv L_2(x)$ következik, tehát a tetszőleges x pontbeli elhelyezkedő vásárló az *I* és *II* vállalatot egyformán preferálja.

(Ha $0 \leq x_1 < x \leq x_2 \leq 1$, akkor (6.29) miatt $f(x) > f(x_1) = f(0) = (0)$ miatt $f(x) > 0$, azaz $L_1(x) > L_2(x)$ miatt az x-beli vásárló a *II* vállalatot preferálja. Ehhez hasonlóan $0 \leq x_1 < x_2 \leq x \leq 1$ esetén $f(x) \geq f(x_2) > f(x_1) = f(0)$, következményeképpen $f(x) > 0$, vagyis ekkor az $f(x) = 0$ egyenletnek nincs megoldása, és a *II* vállalat a preferált.)

B5) eset. Legyen $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ és $0 \leq x \leq 1$, valamint teljesüljön az is, hogy $f(1) = c_1 - c_2 - x_1 + x_2 < 0$. Ekkor (6.30) miatt $f(x)$ monoton növekvő, így innen $f(x) \leq f(1) < 0$, vagyis az $f(x) = 0$ egyenletnek nincsen megoldása. Ugyanakkor $f(x) < 0 \Leftrightarrow c_1 + |x - x_1| < c_2 + |x - x_2| \Leftrightarrow L_1(x) < L_2(x)$, vagyis a vásárló a $[0, 1]$ akármelyik x pontban is helyezkedik el, az *I* vállalatot részesíti előnyben, hiszen a szállítási költséggel bővített ár az $L_1(x)$-re kisebb.

B6–B8) eset. Álljon fenn, hogy $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ és $0 \leq x \leq 1$, továbbá legyen $f(1) = c_1 - c_2 - x_1 + x_2 = 0$. Ebben az esetben (6.29) miatt $[x_2, 1]$-en $f(x) = c_1 - c_2 + |x - x_1| - |x - x_2| \equiv 0$, ahonnan $L_1(x) \equiv L_2(x)$ következik, vagyis az x ponthoz tartozó vásárló az *I* és *II* vállalatot egyformán preferálja. Szintén (6.29)-ből amiatt, hogy $f(x)$ az $[x_1, x_2]$-n szigorúan monoton, így (x_1, x_2) tetszőleges χ pontjára $f(x) < f(x_2) = f(1) = 0$, vagyis a vásárló az *I* vállalatot preferálja. Hasonlóan (6.29)–(6.30) miatt $[0, x_1]$ tetszőleges χ pontjára és az (x_1, x_2) tetszőleges $\tilde{x}$ pontjára $f(x) \leq f(\tilde{x}) < 0$ miatt $[0, x_1]$-en a vásárló szintén az *I* vállalatot preferálja.

B9–B10) eset. Legyen $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ és $f(0) * f(1) < 0$. Ekkor (6.31) miatt $f(0) \leq f(1)$, ahonnan $f(0) < 0$ és $f(1) > 0$ következik. A (6.29) szerint a $[0, x_1]$ szakaszon $f(x) \equiv f(0) < 0$ miatt a vásárló az *I* vállalatot preferálja. Hasonló okfejtéssel indokolható, hogy az $[x_2, 1]$ szakaszon a vásárló a *II* vállalatot preferálja, hiszen $f(x) \equiv f(1) > 0$. Így $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$, és (6.31)-ből adódóan

$$c_1 - c_2 - x_1 - x_2 + 2\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{x_1 + x_2 + c_2 - c_1}{2} \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2}.$$

(6.29) miatt $f(x_1) = f(0) < 0$, illetve $f(x_2) = f(1) > 0$, így az $f(x) = 0$ egyenlet $\tilde{x}$ megoldására egyrészt $x_1 \leq \tilde{x} \leq x_2$, másrészt $\tilde{x} \neq x_1$ és $\tilde{x} \neq x_2$. Az utolsó három összefüggés szerint $x_1 < \tilde{x} < x_2$. (6.29) szerint $[x_1, x_2]$-n $f(x)$ szigorúan monoton nő, tehát $x_1 \leq x < \tilde{x}$-ra $f(x) < f(\tilde{x}) = 0$. Ennek megfelelően az $[x_1, \tilde{x})$-en $f(x) < 0$, vagyis ott a vásárló az *I* vállalatot preferálja. Hasonlóan látható be az is, hogy $(\tilde{x}, x_2]$-n $f(x) > 0$, tehát ott a *II* vállalat preferált. $f(0) = c_1 - c_2 + x_1 - x_2 = 0$, $f(1) = c_1 - c_2 + x_1 - x_2 = 0$ jelöléssel a Hotelling-duopólium tipikus B7–B9) esete az alábbi állítás formájában foglalható össze.

6.1. Állítás. Ha $f(0) = c_1 - c_2 + x_1 - x_2 < 0$, és $f(1) = c_1 - c_2 + x_1 - x_2 > 0$, akkor $f(\widetilde{x}) = 0$, ha

$$\widetilde{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2}\ .$$

- A $[0, \widetilde{x})$-en pedig $f(x) < 0 \Rightarrow L_1(x) < L_2(x) \Rightarrow$ az x-beli vásárló az I vállalatot preferálja,
- az $x = \widetilde{x}$-beli vásárlóra $f(x) = 0 \Rightarrow L_1(x) = L_2(x) \Rightarrow$ az I, II egyformán preferált, míg
- $(\widetilde{x}, 1]$-en $f(x) > 0 \Rightarrow L_1(x) > L_2(x) \Rightarrow$ az x-beli vásárló a II vállalatot preferálja.

Irodalomjegyzék

Mazalov, V. (2014): *Mathematical Game Theory and Applications.* Wiley.