Dr. Zibolen Endre*

PIACI DINAMIKÁK KEZELÉSE A MATHEMATICA, MAPLE ÉS DERIVE SZOFTVERREL

1. BEVEZETÉS

Ennek a cikknek a céljai a következők:

- Kínálati és keresleti modelleket állítani fel folytonos-idő és diszkrét-idő környezetben, hogy meg lehessen vizsgálni a piaci árak és mennyiségek időbeli alakulását.
- Képletet találni az árra az idő függvényeként.
- Követni az ár- és mennyiségi ábrák időbeli alakulását.
- Elemezni az intertemporális és piackitisztulási egyensúlyok problémáit.
- Kiterjeszteni az elemzést elsőrendű differenciál- és differenciaegyenletekre, hogy olyan közgazdasági jelenségeket lehessen kimutatni, mint a ciklikusság vagy az oszcillálás.
- Dinamikus Cournot-féle oligopolisztikus verseny modellt állítani fel reakció függvények és mennyiség kiigazítási mechanizmusok felhasználásával.
- Szemléltetni a Cournot dinamikákat.
- Megmutatni, hogyan lehet és hogy érdemes az előző feladatokat a Maple nyelven tárgyalni, vagy akár a Mathematica és a Derive szoftver felhasználásával.

Ez a cikk alapvetően JOHN ROBERT STINESPRING „Mathematica for Microeconomics” című könyvén [1] és annak a Mathematica szoftver nyelvén írt következő programjain (notebookjain) alapul: SupplyDemand.nb, Inventory Adjustment.nb, AdaptiveExpectations.nb és Dynamic Oligopoly.nb. Ezek a programok lettek adaptálva Maple és Derive környezetre, igazolva hogy mindegyikük alkalmas a célra, a kitűzött feladatok megoldására.

STINESPRING szerint fokozódik az igény a matematika felhasználása és precizitása iránt a közgazdaságtanban. Míg korábban csak az analízis és lineáris algebra felhasználására volt igény, ez kiegészült a differenciálegyenletek és a dinamikus optimalizálás igénylésével is. A Mathematica program, de bármely más hasonló program, mint amilyen a Maple, illetve még a kifejezetten egyszerű Derive program használata is lehetővé teszi, hogy az oktatók kevesebb időt töltsenek előadásaikon terjengős számítások végzésével és így több idejük jusson közgazdasági koncepciók elemzésére. A könyvében kifejtett közgazdasági programoknak bevitele az osztálytermekbe az oktatók számára megengedi többszörös komparatív statikák és ábrák gyors előállítását, minek következtében mélyebb, átfogóbb közgazdasági elemzést is biztosít.

A Maple, Derive programot ebben a cikkben az analízis és algebra alapvető számításinak elvégzésén túl differenciálegyenletek, differenciaegyenletek, rekurzív egyenletek illetve differenciálegyenlet-rendszerek megoldására fogjuk alkalmazni. Itt a korlátozott hely miatt csak a legfontosabb számításokat végeztethetjük el és csupán a Maple programmal, elvétve a Derive programmal is. Azt, hogy az összes számítás hogyan végezhető el és mindegyik ábra hogyan állítható elő a Mathematica, illetve a Derive programmal, a www.freeweb.hu/ecomat weblap PiaciDinamika Mathematica.ppt és PiaciDinamikaDerive.ppt bemutatója tárgyalja teljes részletességgel, össze-

* BGF Külkereskedelmi Kar, Módszertani intézeti tanszéki osztály, főiskolai docens.

függő egészként. Ugyanitt található a MathematicaPéldákban.ppt és DerivePéldákban bemutató, ezek egyszerű példákon keresztül mutatják be a felhasznált Mathematica és Derive utasításokat.

Egy tökéletes versenyzői piac elemzésével kezdjük, amelynek a dinamikáit a walrasi szabályozási vagy kiegyenlítési mechanizmus szabja meg. Ez a mechanizmus az árszabályozást a kínálati és keresleti feltételekre alapozza. A piaci ár növekszik, ha a keresleti mennyiség meghaladja a kínálati mennyiséget, míg csökken, ha a kínálati mennyiség meghaladja a kínálati mennyiséget, és változatlan marad, ha a piac egyensúlyban van.

2. KERESLET ÉS KÍNÁLAT

2.1. Egyensúlyi értékek, illetve ár, kereslet és kínálat időfüggvényei

Az alább ismertetett folytonos idejű modellben, melyet differenciálegyenlet ír le, az áru vagy romlandó, vagy ha nem romlandó, akkor nem készletezik.

$$Qd = \alpha - \beta \cdot P(t) \quad \text{(1. feltétel: kereslet)} \qquad (1)$$

$$Qs = -\gamma + \delta \cdot P(t) \quad \text{(2. feltétel: kínálat)} \qquad (2)$$

Itt *Qd* a keresletet, *Qs* a kínálatot, míg *P(t)* az árat jelöli.

(1) és (2) révén adódik a $Qd = Qs = Q^*$, $P(t) = P^*$, egyensúlyi ár és mennyiség (l. **Mp00**):

$$P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \qquad (3)$$

$$Q^* = \frac{\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}{\beta + \delta} \qquad (4)$$

Tegyük fel 3. feltételként, hogy az árváltozás sebessége arányos a túlkereslettel, azaz (1) és (2) szerint:

$$P'(t) = \varphi \cdot (Qd - Qs) = \varphi \cdot (\alpha - \beta \cdot P(t) - (-\gamma + \delta \cdot P(t))) = \varphi \cdot [\alpha + \gamma - (\beta + \delta) \cdot P(t)].$$

Az (1-3.) feltételek következményeként adódó

$$P'(t) = \varphi \cdot (\alpha + \gamma) - (\beta\varphi + \delta\varphi) \cdot P(t), \; P(0) = P0 \qquad (5)$$

kezdeti érték feladat megoldása (a Derive-megoldás **D06**-on alapul)

$$P = P(t) = \frac{\alpha + \gamma + e^{t(-\beta\varphi - \delta\varphi)}\beta\left(P0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right) + e^{t(-\beta\varphi-\delta\varphi)}\delta\left(P0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)}{\beta + \delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} + e^{t(-\beta\varphi-\delta\varphi)}\left(P0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right). \qquad (6)$$

A Maple-s megoldást **Mp01**) tartalmazza.

Mivel (3) szerint $P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$, így a P árfüggvény (6) szerint az alábbi alakba írható át:

$$P(t) = P^* + e^{t[-(\beta+\delta)\varphi]}(P0 - P^*) \qquad (7)$$

Vizsgáljuk meg a *Qd* és *Qs* alakulását! Ehhez helyettesítsük be *P(t)*-t (7)-ből (1)-be és (2)-be:

$$Qd(t) = \alpha - \beta \cdot P(t) = \alpha - \beta \cdot \left[P^* + e^{t[-(\beta+\delta)\varphi]}(P0 - P^*)\right] = \alpha - \beta \cdot \left[\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} + e^{t[-(\beta+\delta)\varphi]}\left(P0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\right], \qquad (8)$$

$$Qs(t) = \gamma + \delta \cdot P(t) = \gamma + \delta \cdot \left[P^* + e^{t[-(\beta+\delta)\varphi]}(P0 - P^*)\right] = \gamma + \delta \cdot \left[\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} + e^{t[-(\beta+\delta)\varphi]}\left(P0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\right]. \qquad (9)$$

Az is megállapítható (7-9) alapján, hogy tetszőleges α, β, γ, δ, φ olyan paraméterre, amelyre $\varphi \neq 0$, $\beta + \delta \neq 0$, a *P(t), Qd(t), Qs(t)* szigorúan monoton függvényei az időnek.

Tegyük fel, hogy

$$(\beta + \delta) \cdot \varphi > 0, \qquad (10)$$

ekkor

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left[P^* + e^{t[-(\beta+\delta)\varphi]}\left(P0 - P^*\right)\right] = P^* + \lim_{t\to\infty}\left[e^{t[-(\beta+\delta)\varphi]}\right]\cdot\left(P0 - P^*\right) = P^* + 0\cdot\left(P0-P^*\right) = P^*,$$

így

$$\lim_{t\to\infty} Qd = \lim_{t\to\infty}\left[\alpha - \beta\cdot P(t)\right] = \alpha - \beta\cdot\lim_{t\to\infty} P(t) = \alpha - \beta\cdot P^* = Q^*$$

$$\lim_{t\to\infty} Qs = \lim_{t\to\infty}\left[\gamma + \delta\cdot P(t)\right] = \gamma + \delta\cdot\lim_{t\to\infty} P(t) = \gamma + \delta\cdot P^* = Q^*$$

tehát, ha t tart a végtelenhez, akkor $P(t)$ tart P^*-hoz, $Qd(t)$ és $Qs(t)$ pedig tart Q^*-hoz, vagyis a P^*, Q^* egyensúlyi helyzetek globálisan stabilisak (l. **Ma03**). (11)

Tegyük fel, hogy

$$(\beta+\delta)\cdot\varphi > 0. \qquad (14)$$

Ekkor fennállnak az alábbi (15-19) összefüggések:

Ha $P0 - P^* > 0$, azaz $P0 > P^*$, akkor P(t) monoton fogy. (15)

Ha $P0 - P^* < 0$, tehát $P0 < P^*$, akkor P(t) szigorúan monoton nő. (16)

Ha $-\beta(P0-P^*) > 0$, akkor $Qd(t)$ szigorúan monoton fogy, míg $Qs(t)$ szigorúan nő. (17)

Ha $-\beta(P0-P^*) < 0$, akkor $Qd(t)$ szigorúan monoton nő, és $Qs(t)$ szigorúan fogy. (18)

Ha $P0>P^*$, akkor $P(t)$ monoton fogyva tart a P^* egyensúlyi helyzethez, (7-9) szerint $P0$ növelése lassítja az egyensúlyi helyzethez közelítést $P(t)$-re, $Qd(t)$-re és $Qs(t)$-re. (19)

Mivel $P0$-tól, β előjelétől és $(\beta + \delta)\cdot\varphi$ előjelétől függ például $P(t)$, $Qd(t)$, $Qs(t)$ monotonitása, valamint konvergenciája, ez legalább 8 különböző esetet jelent. Válasszunk ki néhányat és állítsuk elő (7-9) felhasználásával $P(t)$-t, $Qd(t)$-t, $Qs(t)$-t azért, hogy tanulmányozhassuk, ábrázolhassuk!

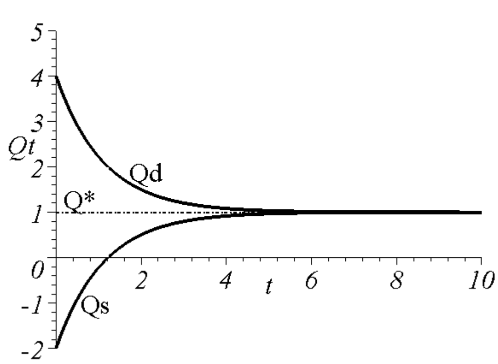
2.2. Példák dinamikailag stabil rendszerek (grafikus) elemzésére (l. 3-4, 7-9)

1. eset

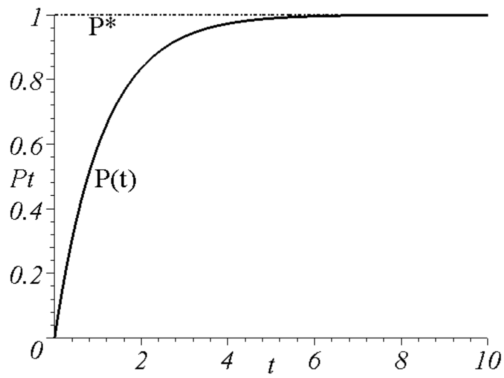
Legyen φ=0.15, β=3, α=4, δ=3, γ=2. Ekkor (3-4) miatt $P^* = 1$, $Q^* = 1$. Továbbá (7-9) szerint

$$P = 1 + e^{-0.9t}(-1+P0),\ Qd = 1 - 3e^{-0.9t}(-1+P0),\ Qs = 1 + 3e^{-0.9t}(-1+P0)$$

P0=0-ra $P = 1 - e^{-0.9t}$, $P^* = 1$, $Qd = 1 + 3e^{-0.9t}$, $Q^* = 1$. Eszerint $t \geq 0$-ra P értéke 0-ról 1-re nő, Qd-é 4-ről 1-re fogy, Qs-é –2-ről 1-re nő. Ezt mutatja az alábbi *1-2. ábra*. *(*L. még **Mp02- Mp06**.*)*



1. ábra



2. ábra

2a. eset

*φ=0.15, β=3, α=4, δ=3, γ=2. P0 = 0, 0.5, 0.75. (*L. még **Mp02-Mp04, Mp07**).*)* A *P0 paramétertől függő $Qd(t)$, $Qs(t)$, Q^** görbesereg egyenlete:

$$Qd(t) = 1 - 3e^{-0.9t}(-1+P0),\ Qs(t) = 1 + 3e^{-0.9t}(-1+P0),\ Q^* = 1.$$

A *P0* paramétertől függő *P(t), P** görbesereg egyenlete:

$$P(t) = 1 + e^{-0.9t}(-1 + P0),\ P^* = 1\ (P0 = 0,\ 0.5,\ 0.75).$$

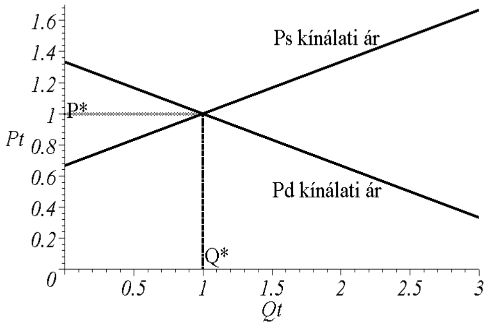
(1) szerint Qd1 = α – β·*Pd*, ennek megoldása P-re: $Pd = \dfrac{\alpha - Qd1}{\beta}$. (20)

(L. **Mp08**)

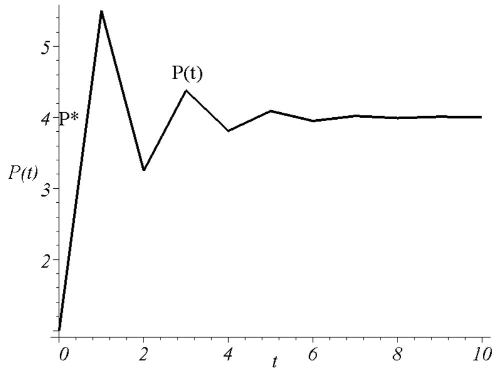
(2) szerint $Qs1 = -\gamma + \delta \cdot Ps$, ennek megoldása *P*-re: $Ps = \dfrac{\gamma + Qs1}{\delta}$. (21)

2b eset

***φ**=0.15, **β**=3, **α**=4, **δ**=3, **γ**=2* mellett $Pd = \dfrac{4 - Qd1}{3}$ és $Ps = \dfrac{2 + Qs1}{3}$ (a *3. ábra* szerint is), illetve változatlanul $Q^* = 1$, $P^* = 1$.



3. ábra



4. ábra

(A *3. ábra* Maple-s elkészítésének elemeit **Mp09**) tartalmazza.)
A *3. ábra* alapján levonhatóak az alábbi következtetések:

- Egy rendszer stabilis amennyiben a kínálati görbe meredeksége nagyobb a keresleti görbéénél.
- Egy instabil rendszert egy olyan emelkedő meredekségű keresleti görbével jellemezhető, amelynek meredeksége nagyobb, mint az emelkedő meredekségű kínálati görbe meredeksége.

2.3. Példák dinamikailag instabil rendszerek (grafikus) elemzésére (3-4, 7-9), (20-21) szerint

3. eset

$|\beta| > |\delta|$ esete. $(\varphi = 0.15)$, $\beta = -3$, $\delta = 2$, $\gamma = 2$, α=4, $(P0 = 0)$. Ekkor $Pd = (-4 + Qd)/3$, $Ps = (2 + Qs)/3$. Ezek közös koordinátarendszerben való ábrázolása azt mutatja, hogy metszéspontjuk (azaz egyensúlyi helyzet) csak negatív Q mennyiségre van, ami nem reális. Az alábbi számítási eredmények is megerősítik ezt.

$Q^* = -14$, $Qd(t) = -14 + 18 \cdot e^{0.15t}$, $Qs(t) = -14 + 12 \cdot \mathrm{e}^{0.15t}$, $P^* = -6$, $P(t) = -6 + 6 \cdot e^{0.15t}$.

A változók rohamosan távolodnak az egyensúlyi (negatív) értékeiktől.

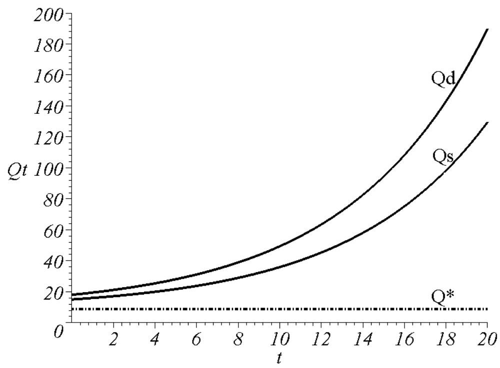
4. eset

$|\beta| > |\delta|$ esete. $(\varphi = 0.15)$, $\beta = -3$, $\delta = 2$, γ=1, α=-6, $(P0 = 0)$. *Így* $P^* = 5$, $Q^* = 9$,

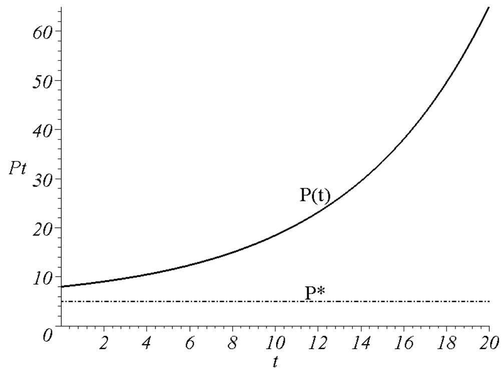
$$Pd = (6 + Qd)/3,\ Ps = (1 + Qs)/2.$$

5. eset

$|\beta| > |\delta|$ eset. $(\varphi = 0.15)$, $\beta = -3$, $\delta = 2$, $\underline{\gamma=1}$, $\underline{\alpha=-6}$, $(P0 = 8)$. *Így* $P^* = 5$, $Q^* = 9$, $P(t) = 5 + 3e^{0.15t}$, $Qd(t) = 9 + 9e^{0.15t}$, $Qs(t) = 9 + 6e^{0.15t}$. *(L.* 5-6. *ábra,* ill. még **Mp02-Mp06**.*)*



5. ábra



6. ábra

6. eset

$|\beta| > |\delta|$ eset. $(\varphi = 0.15)$, $\beta = -3$, $\delta = 2$, $\gamma = 1$, $\alpha = -6$, *(*$\underline{P0=2}$*).* *Így* $Q^* = 9$, $Qd(t) = 9 - 9 \cdot e^{0.15t}$, $Qs(t) = 9 - 6 \cdot e^{0.15t}$, $P^* = 5$, $P(t) = 5 - 3 \cdot e^{0.15t}$.

3. MAGASABB RENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK, ÁRVÁRAKOZÁSOK

Általánosítsuk *a Qd és Qs* alakjára (1-2)-ben tett feltevésünket, legyen most

$$\begin{aligned} Qd &= \alpha - \beta \cdot P(t) + \mu \cdot P'(t) + \nu \cdot P''(t), \\ Qs &= -\gamma + \delta \cdot P(t) + \eta \cdot P'(t) + \omega \cdot P''(t). \end{aligned} \tag{22}$$

Könnyű olyan egyszerű feltételt megfogalmazni, amely a keresett *P(t)*-re az alábbi, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlettel leírható kezdeti érték feladatra vezet:

$$P(t) = 9 - \frac{2}{5} P'(t) - \frac{1}{5} P''(t), \; P(0) = 12, \; P'(0) = 1. \tag{23}$$

Könnyen belátható az is, hogy ennek megoldása

$$P(t) = 9 + 2e^{-t} \sin(2t) + 3e^{-t} \cos(2t) \tag{24}$$

(A Mathematica-megoldás és ábrázolása **Mp10-**en alapul.)

4. KÉSZLETSZABÁLYOZÁS

A diszkrét idejű modellben, amelyet differencia-egyenlet fog leírni, az előző folytonos idejű modelltől eltérően, megengedjük a készlethalmozást.

$$Qd = -Q(t) + \alpha - \beta \cdot \mathrm{P(t)} \text{ (1. feltevés: kereslet)} \tag{25}$$

$$Qs = -Q(t) - \gamma + \delta \cdot \mathrm{P(t)} \text{ (2. feltevés: kínálat)} \tag{26}$$

$$P(t+1) = P(t) - \sigma \cdot (Qs - Qd), \; P(0) = P0 \text{ (3. feltevés: árkorrekció)} \tag{27}$$

(25-26) felhasználásával (27) egyszerűsített alakja az alábbi lesz:

$$P(t+1) = [1 - \sigma(\beta + \delta)] \cdot P(t) + \sigma(\alpha + \gamma), \; P(0) = P0. \tag{28}$$

A (28) rekurzív egyenlet megoldása

$$P(t)=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+\left(P0-\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)[1-(\beta+\delta)\sigma]^t=P^*+(P0-P^*)[1-(\beta+\delta)\sigma]^t, \quad (29)$$

ahol $P^*=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ egyensúlyi helyzet a (25-26)-ból a $Qd = Qs$ egyenlet $P(t)$-re vonatkozó megoldásaként adódik (1-3)-mal összhangban. (L. még **Mp11.**) Tehát

$$P^*=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}. \quad (30)$$

A (25-26, 28) modell dinamikai stabilitása az $1-(\beta+\delta)\sigma$ kifejezés értékétől függ. Legyen

$$z=1-(\beta+\delta)\sigma. \quad (31)$$

Eszerint a $P(t)$-vel jelölt megoldás $z=1-(\beta+\delta)\sigma$

nem oszcilláló,	ha	$z > 0$.
oszcilláló,	ha	$z < 0$.
divergens,	ha	$\lvert z\rvert > 1$.
konvergens,	ha	$\lvert z\rvert < 1$.

Szemléltessük a $z = -0.5$ esetet a $\delta=2$, $\beta = 1$, $\sigma = 0.5$, $P0 = 1$, $\alpha = 10$, $\gamma = 2$ paraméterértékekkel! A P^*, z (29-31) megfelelő képletei alapján:

$$P^*=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=4,\ z=1-(\beta+\delta)\sigma=-0.5 \text{ és } P(t)=4-3(-0.5)^t. \quad (32)$$

Számítsuk ki a $P(t)$ árat a $t = 0, 1, 2, ..., 20$ időpontokban és ábrázoljuk a *4. ábrán*! (Az ábrázolás Maple-megoldás alapja **Mp12**-n alapul.)

1	4.02344	3.99982	
5.5	3.98828	4.00009	
3.25	4.00586	3.99995	
4.375	3.99707	4.00002	(33)
3.8125	4.00146	3.99999	
4.09375	3.99927	4.00001	
3.95313	4.00037	4	

Az *ábra* alapján is megállapíthatjuk, hogy $P(t)$ konvergál $P^* = 4$-hez. Az eredményül adódó *4. ábrát* a korábbi *3. ábra* mellett találhatjuk meg.

5. ADAPTÍV VÁRAKOZÁSOK

Megfogalmazzuk az alábbi, adaptív várakozásokkal kapcsolatos diszkrét dinamikai keresleti és kínálati modellt:

$$Qd=-Q(t)+\alpha-\beta\cdot P(t) \quad (34)$$

(1. feltevés: a kereslet a t időpontbeli ár függvénye),

$$Qs=-Q(t)-\gamma+\delta\cdot P(t-1) \quad (35)$$

(2. feltevés: a kínálat a $t-1$ időpontbeli ár függvénye),

$$P(0)=P0 \quad (36)$$

(3. feltevés: a $P(t)$ árra vonatkozó kezdeti feltétel).

A $Qd = Qs$ egyensúlyi feltételből (34-36) révén adódik, hogy

$$\alpha-\beta\cdot P(t)=-\gamma+\delta\cdot P(t-1),\ P(0)=P0. \quad (37)$$

A (37) rekurzív egyenlet megoldása

$$P(t) = P^* + (P0 - P^*)\left(\frac{-\delta}{\beta}\right)^t, \text{ ahol } P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}. \tag{38}$$

Rögzítsük a paraméterértékeket és a kezdeti feltételt:

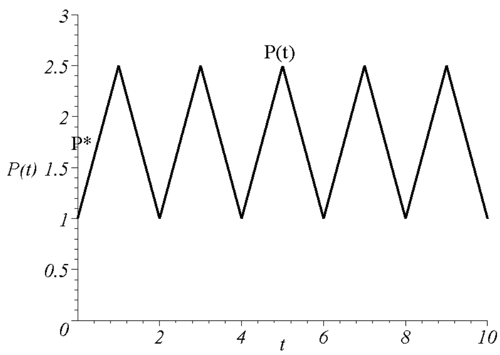
$$\delta = 6,\ \beta = 6,\ \alpha = 17,\ \gamma = 4,\ P0 = 1. \tag{39}$$

Ekkor (38) szerint az egyensúlyi ár $P^* = 7/4$, illetve

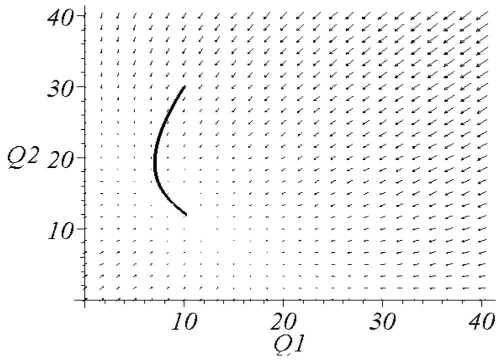
$$P(t) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}(-1)^t,\ t = 0,1,2,\ldots. \tag{39}$$

$$P(t) \text{ értékei: } 1,\ 5/2,\ 1,\ 5/2,\ 1,\ 5/2,\ \ldots \tag{40}$$

Ábrázoljuk a (39) paraméterekhez és kezdeti értékhez tartozó *P(t)* értékeit (40)-ből az alábbi 7. ábrán! (L. **Mp12**.*)*



7. ábra



8. ábra

6. DINAMIKUS OLIGOPÓLIUM

Tekintsünk egy egyszerű COURNOT-féle duopólium modellt, amelyben két vállalat áll szemben c_1, illetve c_2 marginális költségekkel. A piaci ár az általuk összesen előállított mennyiség függvénye. Feltételezve, hogy nincsenek fix költségek, a keresleti és profit egyenletek az alábbiak:

$$\begin{aligned} P(Q) &= \alpha_0 - \alpha_1 \cdot [Q1(t) + Q2(t)] \\ Profit_1 &= P(Q)\cdot Q1(t) - c_1 \cdot Q1(t) \\ Profit_2 &= P(Q)\cdot Q2(t) - c_2 \cdot Q2(t) \end{aligned} \tag{41}$$

Jelölje $Q1_{SR}(Q2_{SR})$ rögzített *Q2(Q1)* mellett a $Profit_1(Profit_2)$ maximumához tartozó *Q2(Q1)* értéket (short-run profit maximum). A $Profit_1$ és $Profit_2$ szélső értékének szükséges feltételéből könnyen adódik, hogy

$$\begin{aligned} Q1_{SR} &= -\frac{c_1 - \alpha_0 + Q2(t)\alpha_1}{2\alpha_1} \\ Q1_{SR} &= -\frac{c_1 - \alpha_0 + Q2(t)\alpha_1}{2\alpha_1} \end{aligned} \tag{42}$$

A cégek növelik (csökkentik) kibocsátásukat, ha az aktuális kibocsátási szint kisebb, mint a rövid távú optimum Q_{SR}. Tételezzük fel, hogy a kibocsátás módosításának üteme *(Q')* arányos az aktuális kibocsátási elmaradással (többlettel), $(Q_{SR}-Q)$-val:

$$\begin{aligned} Q1' &= \gamma 1 \cdot (Q1_{SR} - Q1) \\ Q2' &= \gamma 1 \cdot (Q2_{SR} - Q2) \end{aligned} \tag{43}$$

Rögzítsük a paramétereket például a következők szerint:

$$\alpha_0 = 100\,,\ \alpha_1 = 3\,,\ c_1 = 0\,,\ c_2 = 0\,,\ \gamma 1 = 0.1\,,\ \gamma 2 = 0.1\,. \qquad (44)$$

(42-44) alapján *Q1(t)*-re, *Q2(t)*-re az alábbi elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciál-egyenlet-rendszer adódik, ahol legyen *Q1(0) = 10, Q2(0) = 30:*

$$\begin{aligned} Q1'(t) &= -\frac{1}{10}Q1(t) - \frac{1}{20}Q2(t) + \frac{5}{3}, \\ Q2'(t) &= -\frac{1}{20}Q1(t) - \frac{1}{10}Q2(t) + \frac{5}{3}. \end{aligned} \qquad (45)$$

$$Q1(0) = 10\,,\ Q2(0) = 30 \qquad (46)$$

A (45-46) kezdeti érték feladat megoldása például **Mp13** után a következő:

$$\begin{aligned} Q1 &= \frac{80}{9}\cdot e^{-\frac{3}{20}t} - 10\cdot e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{100}{9}, \\ Q2 &= \frac{80}{9}\cdot e^{-\frac{3}{20}t} + 10\cdot e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{100}{9}. \end{aligned} \qquad (47)$$

A (45) differenciálegyenlet iránymezőjét például **Mp40** alapján, továbbá a (47) megoldás görbéjét is célszerű egy *Q1, Q2* tengelyű koordinátarendszerben ábrázolni, ami alapján látható, hogyan tart (47) megoldásgörbéje egy egyensúlyi helyzethez, illetve az is kiolvasható, hogy egyéb megoldások szemléletesen hogyan viselkednek az idő függvényében.

7. A FELHASZNÁLT MAPLE-PARANCSOK BEMUTATÁSA PÉLDÁKON KERESZTÜL

7.1. Kereslet, kínálat (Supply&Demand.nb) speciális Maple parancsai

Mp00) A *Qstar, Pstar* egyensúlyi értékeket az (1-2) egyenletből *Qd = Qs = Qstar, P = Pstar* helyet-tesítéssel az (1-2) megoldásaként kapjuk.

► solve({Qstar=alpha-beta*Pstar,Qstar=-gamma+delta*Pstar},{Qstar,Pstar}): assign(%):

► Pstar; Qstar;

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

$$\frac{\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\lambda}{\beta+\delta}$$

Mp01) A $P'(t) = \varphi\cdot(\alpha+\gamma) - (\beta\varphi+\delta\varphi)\cdot P(t)$ differenciálegyenlet az alábbi formában adható meg: diff(P(t),t) = phi*(alpha+gamma)-(beta*phi+delta*phi)*P(t). Az input:

► diff(P(t),t) = phi*(alpha+gamma)-(beta*phi+delta*phi)*P(t);

Az output:

⇨ $$\frac{\partial}{\partial t}P(t) = (\alpha+\gamma)\varphi - (\varphi\beta+\varphi\delta)P(t).$$

Az (5) megoldása:

► dsolve({diff(P(t),t) = phi*(alpha+gamma)-(beta*phi+delta*phi)*P(t),P(0)=P0},P(t));

⇨ $$P(t) = \frac{\alpha}{\beta+\delta} + \frac{\gamma}{\beta+\delta} - \frac{e^{(-\varphi(\beta+\delta)t)}(\alpha+\gamma-P0\cdot\beta-P0\cdot\delta)}{\beta+\delta}$$

Ez a (6) alakra hozható:

$$P(t)=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-\frac{e^{(-\varphi(\beta+\delta)t)}(\alpha+\gamma-P0\cdot(\beta+\delta))}{\beta+\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-e^{(-\varphi(\beta+\delta)t)}\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-P0\right)=$$

$$=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+e^{(-\varphi(\beta+\delta)t)}\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-P0\right)=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+e^{t(-\beta\varphi-\delta\varphi)}\left(P0-\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right).$$

Mp02) (6,8-9) alapján

Hozzuk létre *P*-t, *Qd*-t és Qs-t a paraméterek és a *t* változó függvényeként.

► P:=(alpha+gamma)/(beta+delta)+exp(t*(-phi*beta-phi*delta))*(P0-(alpha+gamma)/(beta+delta));

➪ $$P:=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+e^{t(-\beta\varphi-\delta\varphi)}\left(P0-\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right).$$

► Qd:=alpha-beta*P; Qs:=gamma+delta*P;

➪ $$Qd:=\alpha-\beta\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+e^{t(-\beta\varphi-\delta\varphi)}\left(P0-\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\right).$$

$$Qs:=\gamma+\delta\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+e^{t(-\beta\varphi-\delta\varphi)}\left(P0-\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\right).$$

Rögzítsük a paraméterek értékeit az eredmények megjelenítése nélkül!

► unprotect(gamma): phi:=0.15: beta:=3: alpha:=4: delta:=3: gamma:=2:

Írassuk ki *P*-t, *Qd*-t, *Qs*-t egy sorban, helykímélés céljából.

► *print(P,Qd,Qs);*

$$1+e^{(-.90t)}(P0-1),\ \ 1-3e^{(-.90t)}(P0-1)\ ,\ \ 1+3e^{(-.90t)}(P0-1)$$

Így

$$P(t)=1+e^{(-.90t)}(P0-1),$$
$$Qd(t)=1-3e^{(-.90t)}(P0-1),$$
$$Qs(t)=1+3e^{(-.90t)}(P0-1).$$

Mp03) $e^{-c\cdot t}$ határértékének kiszámítása, ha *t* tart a végtelenhez, ahol $c>0$ rögzített.

► assume(c>0): limit(exp(-c*t),t=infinity);

➪ 0

Mp04) Tekintettel az előző utasításra, *P, Qd, Qs* előállításához elég a $P0 = 0$ értékadás.

► P0:=0: print(P,Qd,Qs);

➪ $$P=1-e^{(-.90t)},\ \ Qd=1+3e^{(-.90t)},\ \ Qs=1-3e^{(-.90t)}$$

Mp05) *Qd, Qs,* Q^* ábrázolása *(*l. *1. ábra*):

► QdPlot:=plot(Qd,t=0..10,-2..5,thickness=3,color=[black]): # Qd ábra kiszámítása

► QsPlot:=plot(Qs,t=0..10,-2..5,thickness=1,color=[black]): # Qs ábra kiszámítása

► QstarPlot:=plot(Qstar,t=0..10,-2..5,thickness=2,linestyle=4,color=[black]): # Q* ábrája

► with(plots): # Speciális rajzoló rutinok beolvasása

► b:=textplot({[2.2,1.75,`Qd `],[1,-0.7,`Qs `],[0.65,1.3,`Q* `]},font = [TIMES,ROMAN,12]):

Qd, Qs, Q^* ábráinak együttes megjelenítése (az 1. eset *1. ábrája* lesz az eredmény):

► display({QdPlot,QsPlot,QstarPlot,b},labels=['t','Qt'],labelfont=[TIMES,ITALIC,12]);

Mp06) *P* és P^* ábrázolása *(*l. *2. ábra):*

► PtPlot:=plot(P,t=0..10,0..1,color=[black],thickness=3): # P ábrájának kiszámítása

► PstarPlot:=plot(Pstar,t=0..10,0..1,thickness=2,linestyle=4, color=[black]): # P* ábrája

► b:=textplot({[1.1,0.5,`P(t) `],[2,0.97,`Q* `]},font=[TIMES,ROMAN,12]): # címkék
► display({QdPlot,QsPlot,QstarPlot,b},labels=['t','Qt'],labelfont=[TIMES,ITALIC,12]);
P és P^* ábráinak együttes megjelenítése (az 1. eset *2. ábrája* lesz az eredmény):
► b:=textplot({[2.2,1.75,`Qd `],[1,-0.7,`Qs `],[0.65,1.3,`Q* `]},font=[TIMES, ROMAN,12]):

Mp07) Ismételjük meg a **Ma04)**-et *P0 = 0, 0.5, 0.75*-re.
► P0:=0: print(P0,P,Qd,Qs); P0:=0.5: print(P0,Qd,Qs); P0:=0.75: print(P0,P,Qd,Qs);

$$0\,,\ 1-e^{(-.90t)},\ 1+3e^{(-.90t)},\ 1-3e^{(-.90t)}$$
$$0.5,\ 1-.5e^{(-.90t)},\ 1+1.5e^{(-.90t)},\ 1-1.5e^{(-.90t)}$$
$$0.75,\ 1-.25e^{(-.90t)},\ 1+.75e^{(-.90t)},\ 1-.75e^{(-.90t)}$$

Mp08) Most *Pd*-t, *Ps*-t állítjuk elő:
► Pd:=solve(Qd1=alpha-beta*Pd,Pd); Ps:=solve(Qs1=-gamma+delta*Ps,Ps);

$$Pd := \frac{4-Qd1}{3}$$
$$Ps := \frac{2+Qs1}{3}$$

Mp09) Pd , Ps , P^*, Q^* ábrázolása (l. *3. ábra*):
► Pstar;

1

► Qstar;

1

► with(plots): # speciális rajz szubrutinok betöltése
► B1:=plot(Ps,Qs1=0..3,thickness=3, color=[black]): # Ps ábra számítása
► B2:=plot(Pd,Qd1=0..3,thickness=1, color=[black]): # Pd ábra számítása
► B3:=plot([Qstar,t,t=0..Pstar],thickness=2,linestyle=4 ,color=[black]): # Pstar (P*) ábra
► B4:=plot([t,Pstar,t=0..Qstar],thickness=2, color=[black],style=point):# Qstar (Q*) ábra
► b:=textplot({[2.1,1.5,`Ps kínálati ár`],[2.1,0.52,`Pd kínálati ár`],[0.07,1.05,`P* `],[1.07,0.05,`Q* `]}, font=[TIMES,ROMAN,14]):; # címkék
Jelenítsük meg a számított B1-B4 ábrákat együtt:
► display({B1,B2,B3,B4,b},labels=['Qt','Pt'],labelfont=[TIMES,ITALIC,10]);

(l. 3. ábra*)*

7.2. Magasabb rendű differenciál-egyenletek, árvárakozások

Mp10)
► restart: egy:=P(t)=9-2/5*diff(P(t),t)-1/5*diff(P(t),t,t);

$$egy := P(t) = 9 - \frac{2}{5}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(t)\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(t)\right)$$

► mo:=dsolve({egy,P(0)=12,D(P)(0)=1},{P(t)});

$$P(t) = 9 + 3\mathrm{e}^{(-t)}\cos(2t) + 2\mathrm{e}^{(-t)}\sin(2t)$$

► mo:=rhs(%);

$$9 + 3\mathrm{e}^{(-t)}\cos(2t) + 2\mathrm{e}^{(-t)}\sin(2t)$$

► plot(mo,t=0..8,thickness=3,color=[black]); # $P(t)$ ábrázolása

7.3. Készletszabályozás (InventoryAdjustment.nb) speciális parancsai

Mp11) $P(t+1)=[1-\sigma(\beta+\delta)]\cdot P(t)+\sigma(\alpha+\gamma),\ P(0)=P0$ *megoldása:*

► restart: egy:=P(t+1)=(1-sigma*(beta+delta))*P(t)+sigma*(alpha+gamma):
► PDYN:=rsolve({egy,P(0)=P0},P(t));

➪ $$PDYN := P0\cdot(1-\sigma\beta-\sigma\delta)^t-\frac{(\alpha+\gamma)(1-\sigma\beta-\sigma\delta)^t}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}$$

PDYN átalakítható az alábbiak szerint:

$$PDYN=(1-\sigma\beta-\sigma\delta)^t\cdot\left[P0-\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\right]+\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+\left(P0-\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)[1-(\beta+\delta)\sigma]^t$$

7.4. Adaptív várakozások speciális Maple parancsai

Mp12) $P=\frac{3}{4}(-1)^t+\frac{7}{4}$ előállítása *t=0,…,10* értékeire **seq** paranccsal (l. *7. ábra*, ill. *4. ábra):*

► Digits:=4: adat:=[seq([t,4-3.*(-1/2)^t],t=0..10)];
➪ adat := [[0, 1.], [1, 5.50], [2, 3.25], [3, 4.38], [4, 3.81],[5, 4.09], [6, 3.95], [7, 4.02]]
► plot(adat,labels=["t","P(t)"],labelfont=[TIMES,ITALIC,10]); # A (t,P) ábra

7.5. A DynamicOligopoly.nb (dinamikus oligopólium) speciális Maple parancsai

Mp13)
► jo1:= -1/10*Q1(t)-1/20*Q2(t)+5/3: jo2:= -1/20*Q1(t)-1/10*Q2(t)+5/3:
► egy1:=diff(Q1(t),t) = jo1;

➪ $$Q1'(t)=-\frac{1}{10}Q1(t)-\frac{1}{20}Q2(t)+\frac{5}{3}$$

► egy2:=diff(Q2(t),t) =jo2;

➪ $$Q2'(t)=-\frac{1}{20}Q1(t)-\frac{1}{10}Q2(t)+\frac{5}{3}.$$

► mo:=dsolve({egy1,egy2,Q1(0)=10,Q2(0)=30},{Q1(t),Q2(t)});

➪ $$mo:=\left\{Q1(t)=-10e^{(-1/20t)}+\frac{80}{9}e^{(-3/20t)}+\frac{100}{9},Q2(t)=\frac{80}{9}e^{(-3/20t)}+10e^{(-1/20t)}+\frac{100}{9}\right\}$$

► Q1DYN:=rhs(mo[1]) : Q2DYN:=rhs(mo[2]): # értékeik Q1(t), illetve Q2(t)
► with(plots): # speciális rajzrutínok betöltése a későbbi display parancshoz
► A3:=plot([Q1DYN,Q2DYN,t=0..50],labels=["Q1","Q2"],labelfont=[TIMES,IT ALIC,10], thickness=4): # A megoldásgörbe előállítása képlettel, kirajzolható a display(A3)-mal
► A2:=fieldplot([adj1,adj2],Q1=0..40,Q2=0..40,arrows=SLIM,grid=[25,25]): # A differenciál-egyenlet-rendszer iránymezője
► display({A2,A3}) # A megoldásgörbe és az iránymező együttes kirajzolása
➪ L. *8. ábra.*

8. NÉHÁNY DERIVE-PARANCS BEMUTATÁSA PÉLDÁKON ÁT

(3-4) P^*, Q^* egyensúlyi helyzetek meghatározása:
► Qstar = α - β·Pstar
► Qstar = -γ + δ·Pstar
► SOLVE([Qstar = α - β·Pstar, Qstar = -γ + δ·Pstar], [Pstar, Qstar])

⇔ $\text{Pstar} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \wedge \text{Qstar} = \dfrac{\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma}{\beta+\delta}$

(28) rekurzív egyenlet megoldása:

► LIN1_DIFFERENCE(1-σ·(β+ δ)), σ·(α + γ),t,0)

(23)-mal ekvivalens $1\cdot P''(t)+2\cdot P'(t)+5\cdot P(t)=45$, $P(0)=12$, $P'(0)=1$ megoldása:

► DSOLVE2(2,5,45,0,12,1)

(37)-tel ekvivalens $\mathrm{P}(\mathrm{t})=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}-\dfrac{\delta}{\beta}P(t-1)$ egyenlet megoldása:

► LIN1_DIFFERENCE(-δ/ β, (α+ γ)/ β, t, 0, P0)

(5)-tel ekvivalens $P'(t)+\varphi\cdot(\beta+\delta)\cdot P(t)=\varphi\cdot(\alpha+\gamma)$ egyenlet megoldása:

► LINEAR1(φ·(β+ δ), φ·(α + γ), t, P, 0, P0)

(40) értékeinek előállítása ábrázoláshoz:

► PDYN:=7/3-(3/4)*(-1)^t

► VECTOR([t, PDYN], t, 0, 10)

IRODALOM

[1] STINESPRING, J. R. (2002): Mathematica for Microeconomics, Academic Press, San Diego.

[2] PARLAR, S. M. (2000): Interactive Operations Research with Maple, Birkhäuser, Boston.