Zibolen Endre[*]

GAZDASÁGI DINAMIKAI ELEMEK VIZSGÁLATA TÁBLÁZATKEZELŐVEL

1. BEVEZETÉS

Az előadás célja az, hogy példákon keresztül, modern megközelítésben bemutassa a dinamikák néhány lényeges elemét. A példák közül néhány tisztán algebrai lesz. A továbbiakban a kereslet és kínálat dinamikáit fogjuk elsősorban tekintetbe venni.

Napjainkban minden hallgató hozzáfér táblázatkezelőhöz. A legtöbb főiskolán és egyetemen a táblázatkezelés használatát tanítják is nekik. A táblázatkezelőket azonban gyakran csak a gazdasági adatok rögzítésére és ábrázolására használják fel. Ritkán fogalmaznak meg és vizsgálnak meg akár csak egyszerű dinamikai modelleket is. Utóbbiról kíván ez az előadás szólni, bemutatva hogy csupán táblázatkezelőt használva, további speciális szoftverek nélkül is könnyen eredményre lehet jutni. A vizsgálatokban nem szükséges csakis diszkrét modellekre szorítkozni, folytonos dinamikai modelleket is kényelmesen lehet elemezni az EULER-féle közelítés segítségével.

Van egy másik oka is a táblázatkezelőkre való szorítkozásnak. A közgazdaságtan – éppúgy mint sok más diszciplína –, értékesebb, ha problémáit modellezni lehet és kísérletezéssel meg is tudjuk vizsgálni. Szándéka szerint a kísérletezés a lényege az előadásnak. Általános tapasztalat, hogy a hallgatók a modellezést nulláról szeretik kezdeni. Ha hamis eredményhez jutnak, kénytelenek összevetni modellspecifikációikat az elmélettel, így az elméletet nagyobb figyelemmel kell tanulmányozniuk és a tanultakat sokkal inkább sajátjuknak kell, hogy érezzék. Mindennek persze meg lesz az ára, nevezetesen az, hogy ezeknek a modelleknek elég egyszerűnek kell lenniük.

Az előadás néhány bonyolultabb fogalmat kíván illusztrálni, különös hangsúlyt fektetve a dinamikák grafikus szemléltetésére.

2. DINAMIKAI MODELLEK

Tekintsük a következő elsőrendű rekurzív egyenletet, amiről azt tételezzük fel, hogy valamilyen közgazdasági elméletből jön és az x változót írja le:

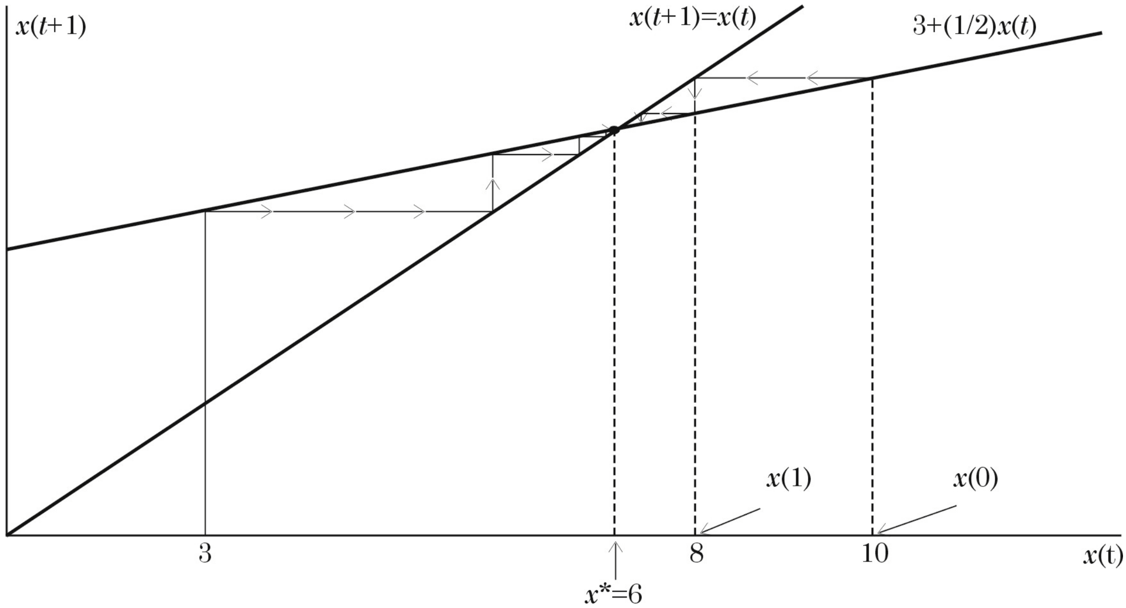
$$x(t+1) = 3 + \frac{1}{2}x(t),\ \ x(0) = 10\,,\ t = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Az idő által generált sorozat ekkor a következő lesz: 10; 8; 7; 6,5; 6,25;… Úgy tűnik, hogy a sorozat egyre közelebb kerül a 6 számhoz, belátható, hogy a 6 szám a rendszer egyensúlyi helyzete lesz. Ha a rendszer egyensúlyban van, akkor nyugalomban is van és így az *x* változó minden periódusban ugyanaz, jelölje ezt az értéket *x**. Ekkor az következik, hogy $x(t+1) = x(t) = x^*$, tehát $x^* = 3 + \frac{1}{2}x^*$, vagy másképpen $x^* = 6$. Ezzel beláttuk, hogy valóban a 6 az egyensúlyi helyzet.

---

[*] BGF Külkereskedelmi Főiskolai Kar, Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, főiskolai docens.

Szemléltessük a szóban forgó elsőrendű rekurzív rendszert egy ábrán, ahol a vízszintes tengelyen az $x(t)$-t, a függőleges tengelyen az $x(t+1)$-et mérjük fel. Az itt kialakuló mintázatra gyakran hivatkoznak pókhálóként (cobweb).



1. ábra

Az *1. ábrából* azt is kiolvashatjuk, hogy az $x^* = 6$ egyensúlyi helyzet (másképpen fix pont) stabilis abban az értelemben, hogy az $x(0) = 10$-ből induló sorozat konvergál hozzá. Ez igaz tetszőleges más kiindulási pontra, például az $x(0) = 3$-ra is. Ezért az $x^* = 6$ fix pontot globálisan stabilisnak is mondják.

Az újraiterálásokkal megállapítottuk, hogy a rendszernek van egyetlen egyensúlyi pontja (fix pontja), amely globálisan stabilis. Ez pedig nem kevés információval bír.

3. DETERMINISZTIKUS DINAM IKAI MODELLEK

Az
$$x(t+1) = a + bx(\mathrm{t}), \quad x(0) = x_0 \tag{2}$$
rendszert és a hozzá hasonlókat determinisztikus dinamikai rendszernek illetve modellnek hívják. Az *a* és *b* konstansok a rendszer paraméterei és a rendszer megoldásának struktúráját szabják meg, ezért ezeket a konstansokat strukturális paramétereknek is nevezik. Az eddigiek szerint egy determinisztikus dinamikai rendszer az alábbiakkal tekinthető megadottnak:

(1) az $x(0) = x_0$ kezdeti feltétel,

(2) a paraméterek értékei, itt az *a* és *b* értékei,

(3) az *x* változó időbeli értékeinek sorozata.

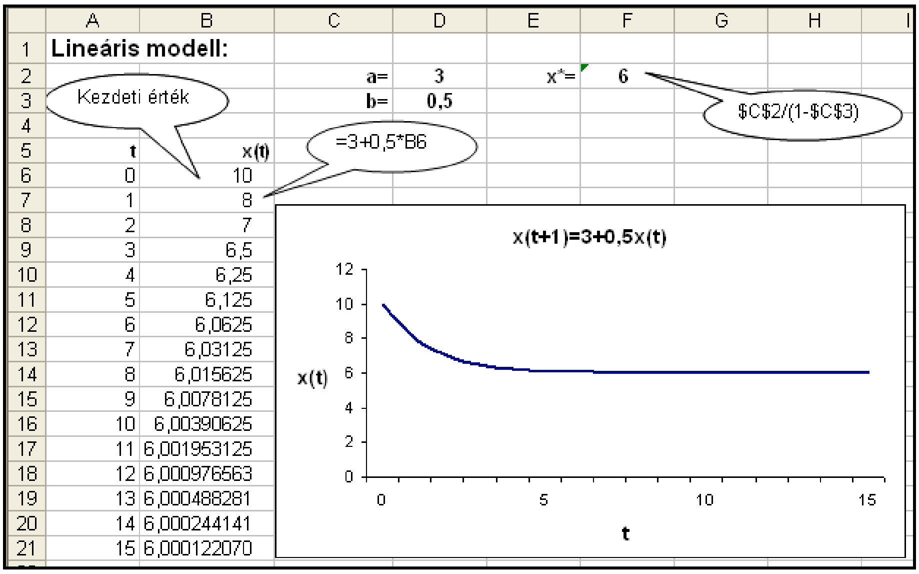
Az a tény, hogy a rendszer determinisztikus, nem jelenti azt, hogy viselkedése nem tűnhet véletlenszerűnek. Az, hogy determenisztikus, az egyszerűen csak annyit tesz, hogy ugyanahhoz a kezdeti feltételhez és ugyanahhoz a paraméterértékekhez ugyanaz az értéksorozat tartozik.

4. DINAMIKAI RENDSZEREK TÁBLÁZATKEZŐBEN

A táblázatkezelők ideális eszközök rekurzív dinamikai rendszerek vizsgálatához és használatukkal elkerülhető hogy a megoldásokat bonyolult formulákkal kelljen előállítani. A modellt a maga általánosságában vehetjük figyelembe, és vethetjük így elemzéseknek alá. A (2)-ben szereplő *a* és *b* paraméterek értékeit rögzítsük a C2, illetve a C3 cellában.

Vizsgáljuk most meg az (1), illetve a (2) rendszert az Excel táblázatkezelő segítségével, külkönböző strukturális paraméterértékek és kezdeti feltétel mellett előállítva a rendszer közelítő grafikus megoldásait lásd a *2. ábrát*!

A *t*, *x*(*t*) sorfejléceket helyezzük el az 5. sorban, az időperiódusokat azonosító t=0,1,2,… értékeket az A6, A7, … cellákban. A B6 cellába kerüljön a kezdeti érték, jelenleg 10.



2. ábra

A B7 cellában az $x(1) = a + bx(0)$ értékét az $= \$C\$2 + \$C\$3 * B6$ képlet fogja megadni hiszen az *a* paraméter és a C2 cellában, *b* is paraméter és a C3 cellában, az $x(0)$ kezdeti érték és ez a B6 cellában található és az *x* változónak, aktuálisan $\mathrm{t} = 0$-beli értékének felel meg. Ha a B7 cella képletét eggyel lejjebb, azaz B8-ba másoljuk, akkor ismeretes módon a B8-ban az $= \$C\$2 + \$C\$3 * B7$ képlet fog megjelenni, aminek nyilván az $x(2) = a + bx(1)$ értelemszerűen helyes összefüggés felel meg. Másoljuk tovább lefelé a B7 képletét 498-szor vagy akár 1998-szor.

Ha az *a*, *b* paramétereket, illetve a kezdeti értékeket a megfelelő cellákban – C2, C3, B6 – megváltoztatjuk, a számítások azonnal és automatikusan végrehajtódnak. Tanulsága az eddigieknek, hogy ha dinamikai rendszereket vizsgálunk táblázatkezelővel, akkor hasznos a paraméterek értékeit külön cellában rögzíteni és egyúttal abszolút címzéssel (dollár jelek között) hivatkozni rájuk.

A rendszer fix pontja az

$$x^* = a + bx^*$$

egyenlet megoldása, ahonnan

$$x^* = \frac{a}{1-b}.$$

Ezt az értéket az F2 cella az $= \dfrac{\$C\$2}{1\text{-}\$C\$3}$ képlet formájában tartalmazza. Ennek megfelelelően a paraméter értékek bármilyen módosítása közvetlenül eredményezi az *x** egyensúlyi érték módosulását.

Végül ábrázoljuk az $x(t)$ sorozat tagjait a t idő függvényében. Ez egy közönséges X-Y ábra lesz az idővel a vízszintes tengelyen és az *x* változóval a függőleges tengelyen. Elkészítéséhez jelöljük ki például az A6:B21 blokk celláit és hívjuk meg a diagramvarázslót, válasszunk olyan X-Y diagramtípust amely össze is köti a pontokat. Ennek eredménye a *2. ábrán* látható:

4.1. Kísérletezések

Ideje kísérleteznünk a modellel, hogy megállapíthassuk hogyan viselkednek a dinamikák jellemzői.

4.1.1 A kezdeti feltételek módosítása

Azt állítottuk, hogy a rendszer globálisan stabilis, függetlenül attól, hogy mi a kezdeti érték (2)-ben. Legyen például $x(0) = 3{,}0{,}7{,}{-2}$ és 25! Mindegy, hogy milyen értéket választunk, a rendszer mindig konvergál a 6 értékhez. Természetesen ehhez néha hosszabb időre van szüksége. Ha a kezdeti érték például 100, akkor sokkal hosszabb idő kell, hogy az egyensúlyi érték közelébe érjünk, mint amikor a kezdeti érték csupán 10.

*4.1.2. Az **a** paraméter módosítása*

Az *a* paraméter értékének növelése (csökkentése) növeli, illetve csökkenti az egyensúlyi értéket, de nincs hatással a stabilitásra. Ellenőrizzük ezt az állítást az *a* paraméter módosításával, miközben válasszuk ismét ugyanazokat a kezdeti értékeket *x*-re nézve.

*4.1.3. A **b** paraméter módosítása*

Állítsuk vissza a kezdeti értéket $\mathrm{x}(0) = 10$-re, *a*-t 5-ra, de most legyen $b = 1{,}5$. Nem csupán negatívvá válik az egyensúlyi érték, de a rendszer is divergálni fog az egyensúlyi értéktől. Az $x(\mathrm{t})$ változó egyre csak nő. Legyen $\mathrm{b} = -\frac{1}{2}$. Az egyensúlyi érték 6-ról 2-re esik le. Továbbá az *x* értéke ez utóbbi értékhez képest hol nagyobb, hol kisebb lesz, de konvergál hozzá. Végül ha $b = -1$, akkor az egyensúlyi érték 1,5 lesz és a rendszer a -7 és 10 értékek között oszcillál, így a rendszer se nem közeledik az egyensúlyi helyzethez, se nem távolodik tőle.

Ezekből a kísérletezésekből kitűnik, hogy a *b* paraméter módosításának drasztikus következménye lehet ennek a rendszerek a dinamikájára nézve ahhoz képest, amivel az *a* paraméter változtatása járna.

Azt kaptuk, hogy egy nagyon egyszerű lineáris modell a dinamikai viselkedés teljes sokféleségét tudja mutatni és ezzel világosan illusztrálja, hogy pusztán azt mutatni ki, hogy egy modellnek van egy egyensúlyi pontja, nem elegendő. Lényeges annak a megállapítása is, hogy a rendszer konvergál-e ehhez az egyensúlyi ponthoz, vagy divergál tőle.

5. KERESLETI ÉS KÍNÁLATI DINAMIKÁK

Tekintsünk egy egyszerű lineáris keresleti és kínálati modellt, ahol $qd(t)$ a keresletet, $qs(t)$ a kínálatot jelöli a *t* idő függvényében. Legyen

$$qd(t) = 20 - 4p(t)$$

$$qs(t) = 5 + 2p(t).$$

Ebben a modellben egyensúly ott van, ahol a kínálat egyenlő a kereslettel. Így azonnal megállapíthatjuk, hogy az egyensúlyi p^* árra és q^* mennyiségre

$$20 - 4p^* = 5 + 2p^*$$
$$p^* = 2.5$$
$$q^* = 10.$$

A dinamika figyelembe vételéhez tételezzük fel, hogy az árváltozás arányos a többletkereslettel. Formálisan

$$\Delta p(t+1) = p(t+1) - p(\mathrm{t}) = a(qd(\mathrm{t}) - qs(\mathrm{t})) \quad (a > 0)\,.$$

Az a paraméter az ár módosulásának sebessége, minél nagyobb az értéke, annál gyorsabban közeledik a piac az egyensúlyhoz és fordítva.

Abban az esetben, ha nincsenek készletek és $q(t)$ a kereskedésbe került mennyiséget jelöli, akkor

$$q(t) = \min(qd(t), qs(t)).$$

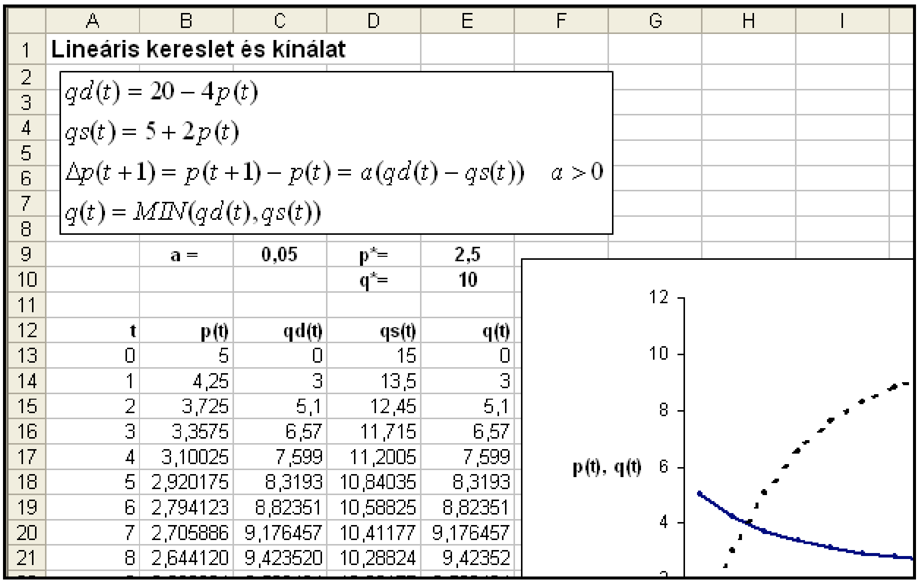
Legyen a = 0,05, ekkor a modellünk

$$qd(t) = 20 - 4p(t)$$
$$qs(t) = 5 + 2p(t)$$
$$\Delta p(t+1) = 0{,}05(qd(t) - qs(t))$$
$$q(t) = \min(qd(t), qs(t)).$$

Innen ki tudjuk fejezni a $t+1$ periódushoz tartozó árat az alábbiak szerint

$$p(t+1) = \mathrm{p}(t) + 0{,}05(15 - 6p(t)).$$

Az elsőnek bemutatott példához hasonlóan adhatjuk meg a modellünket táblázatkezelőben, ennek a *3a. ábra* felel meg.


Lineáris kereslet és kínálat

$qd(t) = 20 - 4p(t)$

$qs(t) = 5 + 2p(t)$

$\Delta p(t+1) = p(t+1) - p(t) = a(qd(t) - qs(t)) \quad a > 0$

$q(t) = MIN(qd(t), qs(t))$

	a =	0,05	p*=	2,5
			q*=	10
t	p(t)	qd(t)	qs(t)	q(t)
0	5	0	15	0
1	4,25	3	13,5	3
2	3,725	5,1	12,45	5,1
3	3,3575	6,57	11,715	6,57
4	3,10025	7,599	11,2005	7,599
5	2,920175	8,3193	10,84035	8,3193
6	2,794123	8,82351	10,58825	8,82351
7	2,705886	9,176457	10,41177	9,176457
8	2,644120	9,423520	10,28824	9,42352

3a. ábra

Tetszőleges kezdeti árból kiindulva megállapíthatjuk a) a kereslet és kínálat mennyiségét, b) az áremelkedést és ennél fogva az árat a következő periódusban és c) a kereskedésbe került mennyiséget. Például, ha a kezdeti ár 5, akkor a keresett és kínált mennyiség $qd(0) = 20 - 4(5) = 0$ és $qs(0) = 5 + 2(5) = 15$ értelemszerűen, míg a kereskedésbe került mennyiség $q(0) = \min(0{,}15) = 0.$

Mindez látható a *3a. ábrán*, ahol $p(0)=5$. A C9 cellában rögzítjük az a értékét és az E9 és E10 cellában az egyensúlyi árat és mennyiséget ráadásul. Az A13 és A28 közötti cellákban az időperiódusokat adjuk meg, a B(13) cellában a kezdeti árat, $p(0)=5$-öt. A B14 cellába az alábbi képletet helyezzük el:

$$= p(0)+a(15-6p(0))$$

$$= B13+\$C\$9*(15-6*B13).$$

Ezt vágólapra másoljuk és beillesztjük a B15:B28 cellákba. A kereslet mennyisége C13-ban egyszerűen:

$$=20-4p(0)$$

$$=20-4*B13,$$

míg a kínálat mennyisége D13-ban egyszerűen:

$$=5+2p(0)$$

$$=5+2*B13.$$

Végül az E13 cellában adjuk meg a kereskedésbe került mennyiséget, ami

$$=\min(qd(t),qs(t))$$

$$=\mathrm{MIN}(C13,D13).$$

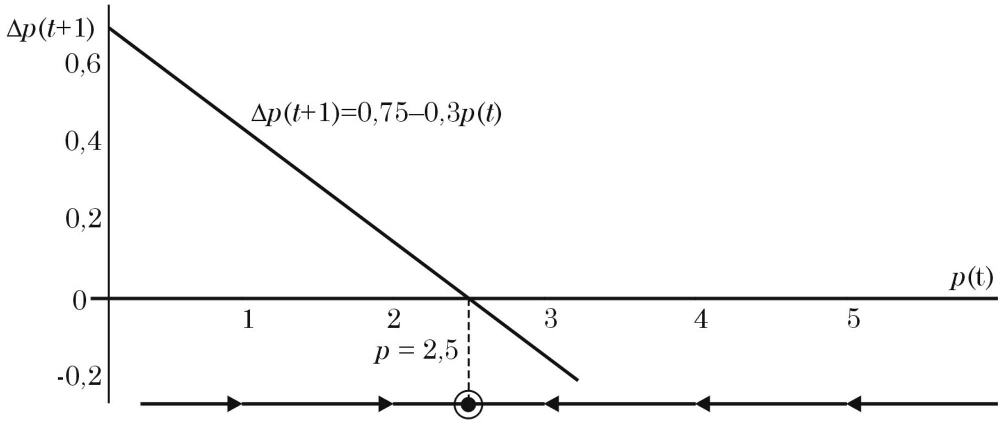
Ezután a C13:E13 blokk celláit átmásoljuk a C14:E28 blokk celláiba. Az ábrázolás a korábbiakhoz hasonlóan történhet, miután kijelöltük az A13:B28 blokk celláit – bennük a t, $p(t)$ értékeket – majd a CTRL billentyűt lenyomva tartva az E13:E28 blokk celláit is, utóbbiak a $q(t)$ értékeit tartalmazzák.

Mivel ezzel a modellt táblázatkezelővel előállítottuk, egyaránt kísérletezhetünk különböző kezdeti árakkal és az a ármodosulási sebességértékekkel. Láthatjuk, hogy ténylegesen a kezdeti ártól függetlenül a piac mindig az egyensúlyi áraihoz és mennyiségeihez fog tartani. Ez a piac globálisan stabilis.

A globális stabilitás a modell alábbi differenciális változatából is megállapítható:

$$\Delta p(t+1)=p(t+1)-p(t)=0{,}05(15-6p(t))=0{,}75-0{,}3p(t).$$

A *3b. ábra* felső része ezt az összefüggést szemlélteti, alsó részén az úgynevezett fázis vonal látható és ez azt mutatja, hogy ha a $p(t)$ ár az egyensúlyi p*=2,5 értéknél kisebb (nagyobb), akkor a $p(t+1)-p(t)$ különbség pozitív (negatív) lesz, tehát az ár nő (csökken), amit a fázisvonalon feltüntetett nyilak is mutatnak.



3b. ábra

5.1. A lineáris pókháló modell

Tekintsük a kereslet és kínálat alábbi egyszerű lineáris modelljét:

$$\begin{aligned} qd(t) &= a - bp(t) \qquad a,b>0 \\ qs(t) &= c + dp^{\mathrm{e}}(t) \qquad c,d>0 \\ p^{\mathrm{e}}(t) &= p(t-1) \\ q(t) &= qd(t) = qs(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Az első három egyenlet megoldásaként adódik, hogy

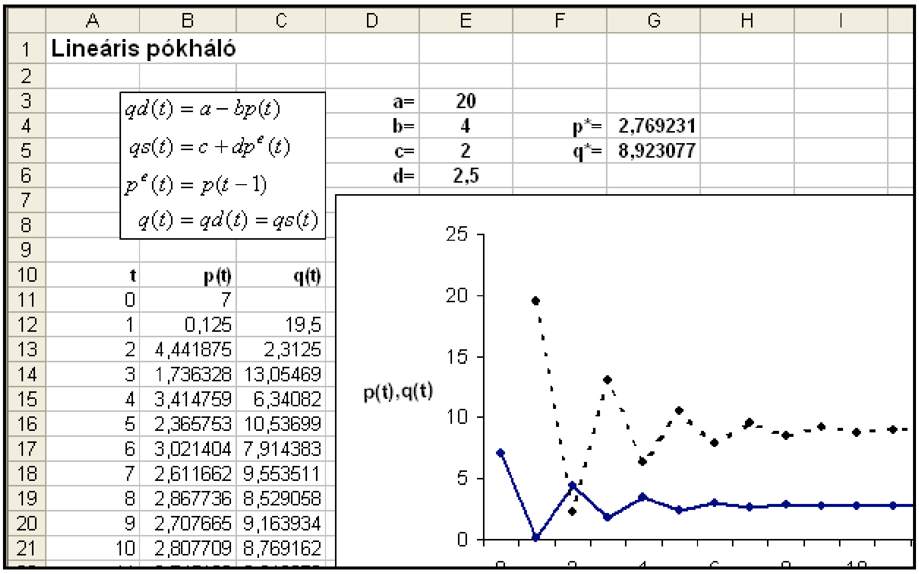
$$p(t) = \frac{a-c}{b} - \left(\frac{d}{b}\right)p(t-1).$$

Ha a rendszer egyensúlyban van, akkor $p(t) = p(t-1) = \ldots = p^*$, ami a következő egyensúlyi árhoz és mennyiséghez vezet:

$$p^* = \frac{a-c}{b+d}, \quad q^* = \frac{ad+bc}{b+d}.$$

A (3) rendszer első és második egyenlete a keresletet és kínálatot írja le, (3) harmadik egyenlete azt a legegyszerűbb feltételezést fogalmazza meg, hogy adott időszakra vonatkozó várt ár ugyanaz lesz, mint az előző időszakban megfigyelt ár, az utolsó egyenlet pedig az egyensúlyi feltételt adja meg.

A korábbiakkal analóg módon fogalmazza meg a modellt és rajzolja ki a $p(t)$ ár és a kereskedésbe került $q(t)$ mennyiség időbeli alakulását az $a = 20$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 2{,}5$ konkrét paraméterértékekhez a *4. ábra*.


Lineáris pókháló

$qd(t) = a - bp(t)$
$qs(t) = c + dp^e(t)$
$p^e(t) = p(t-1)$
$q(t) = qd(t) = qs(t)$

a= 20, b= 4, c= 2, d= 2,5

p*= 2,769231, q*= 8,923077

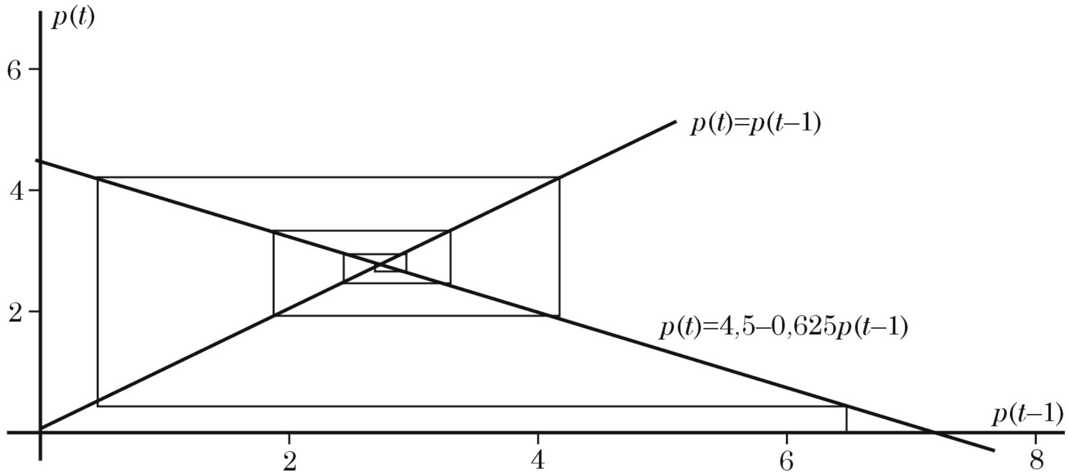
t	p(t)	q(t)
0	7	
1	0,125	19,5
2	4,441875	2,3125
3	1,736328	13,05469
4	3,414759	6,34082
5	2,365753	10,53699
6	3,021404	7,914383
7	2,611662	9,553511
8	2,867736	8,529058
9	2,707665	9,163934
10	2,807709	8,769162

4. ábra

A mostani *a*, *b*, *c*, *d* paraméterértékekre

$$p(t) = \frac{a-c}{b} - \left(\frac{d}{b}\right)p(t-1) = 4{,}5 - 0{,}625\,p(t-1). \tag{4}$$

Ennek pókháló diagramos ábrázolása is lehetővé teszi a $p(t)$ ár időbeli alakulásának követését az *5. ábrából* kiolvasható következő módon. A $p(t)$ értékek a töröttvonal csúcspontjainak első koordinátái lesznek rendre, jobbról kezdve ezek 7; 0,125; 4,421875; … az 5. ábrával összhangban.



5. ábra

5.2. Kísérletezés

Ideje, hogy kísérletezzünk ezzel a modellel. Mivel a lineáris modellt a legáltalánosabban fogalmaztuk meg a táblázatkezelőben, módosíthatjuk a paramétereket és megfigyelhetjük az eredményeket akár a táblázatkezelőben az ár és mennyiségek megoldásgörbéjén, akár a megfelelő pókháló diagramon is.

Ha a d paramétert például 2,5-ről 6-ra növeljük, minden más paramétert, valamint a kezdeti értékeket is változatlanul tartva, akkor a rendszer továbbra is oszcillálni fog, de nem lesz stabilis és mind az ár, mind a mennyiség divergál az egyensúlyi helyzettől. Ahhoz, hogy választ kapjunk arra, hogy ez miért történik így, vegyük észre, hogy (4)-ben eddig a $\frac{d}{b} = -0{,}625$ meredekség abszolút értékben kisebb volt, mint a 45° egyenes meredeksége, míg most $\frac{d}{b} = -1{,}5$ abszolút értékben már nagyobb 1-nél. Az a és c paraméterek nem befolyásolják a fix pont stabilitását illetve instabilitását.

Térjünk vissza a modell pókháló diagramos szemléltetésére. Megfigyelhető, hogy a háló mintája nagy mértékben $\frac{d}{b}$ abszolút értékének az 1 számhoz való viszonyától függ. Mi történik, ha a keresleti görbe meredeksége megegyezik a kínálati görbe meredekségével, azaz ha $\frac{d}{b} = 1$? Próbáljuk ki ezt először a táblázatkezelőben, legyen $b = 2$ és $d = 2$, míg a és c értéke maradjon a korábbi. Induljunk el újra a $p(0) = 7$ kezdeti árral. Az egyensúlyi ár és mennyiség $p^* = 4{,}5$ és $q^* = 11$ lesz. Most mind az ár, mind a mennyiség két érték között fog ugrálni. Az ár 7 és 12 között oszcillál, míg a mennyiség felváltva 6 illetve 16 lesz. De vajon véletlen egybeesés-e csupán, hogy a két ár egyike éppen a kiinduló kezdeti ár? Kísérletezzünk különböző kezdeti árakkal valamivel az egyensúlyi ár felett és alatt. Könnyen kiderül, hogy a két ár közül az egyik valóban mindig a rendszer kezdeti ára.

6. A GOODWIN-FÉLE PIACMODELL

Természetesen számos eltérő feltételezéssel élhetünk az elvárt árral kapcsolatban, így például GOODWIN 1947-ben a következőből indult ki:

$$p^e(\mathrm{t}) = p(t-1) + r(p(t-1) - p(t-2)).$$

Válasszuk a következő modellt:

$$qd(t) = 20 - 4p(t)$$

$$qs(\mathrm{t}) = 2 + 2{,}5p^e(t)$$

$$p^e(\mathrm{t}) = p(t-1) + r(p(t-1) - p(t-2))$$

$$q(t) = qd(t) = qs(t).$$

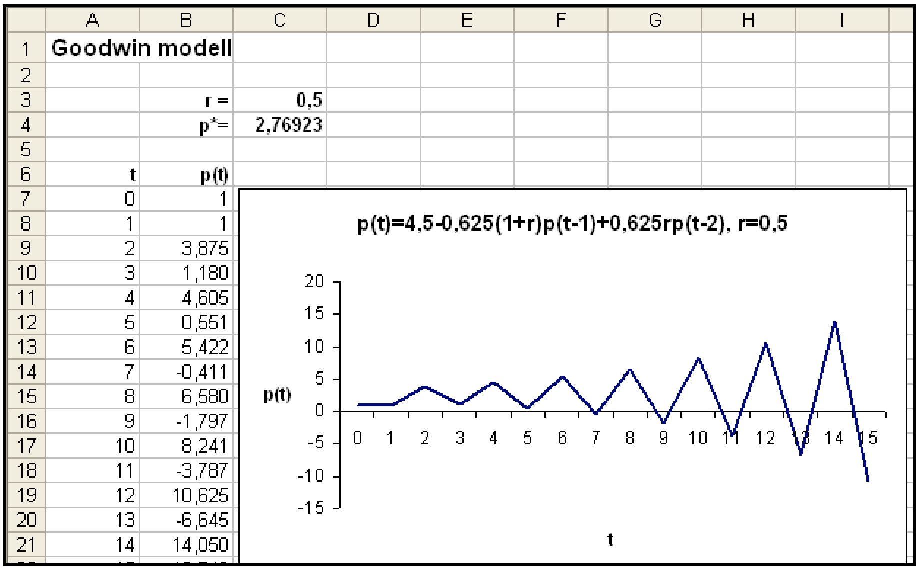
A harmadik egyenletet a kínálati egyenletbe helyettesítve és egyenlővé téve a keresletet és kínálatot, a

$$p(t) = 4{,}5 - 0{,}625(1+r)p(t-1) + 0{,}625rp(t-2)$$

másodrendű rekurzív egyenlet adódik eredményül.

Az első kérdés, ami felmerül (hiszen ehhez sokban hasonló modellt már vizsgáltunk) az, hogy a korábbitól eltérő $p^e(t)$ alak a korábbitól eltérő egyensúlyi feltételhez vezet-e? Ha $p(t) = p(t-1) = p(t-2) = p^*$ feltételezéssel élünk és megkeressük a megoldást p^*-ra nézve, könynyen láthatjuk, hogy az egyensúly változatlan lesz.

Most adjuk meg modellünket táblázatkezelőben az előzővel teljesen egyező módon, az eredményt a *6. ábra* mutatja.



	A	B	C
1	Goodwin modell		
2			
3		r =	0,5
4		p*=	2,76923
5			
6	t	p(t)	
7	0	1	
8	1	1	
9	2	3,875	
10	3	1,180	
11	4	4,605	
12	5	0,551	
13	6	5,422	
14	7	-0,411	
15	8	6,580	
16	9	-1,797	
17	10	8,241	
18	11	-3,787	
19	12	10,625	
20	13	-6,645	
21	14	14,050	

6. ábra

Az egyetlen lényeges különbség, hogy most két kezdeti feltételt kell megadni, a $p(0)$ és $p(1)$ értékeket. A B9 cella az alábbi algebrai illetve táblázatkezelős képletet tartalmazza

$$= 4.5 - 0{,}625(1+r)p(1) + 0{,}625rp(0)$$

$$= 4{,}5 - 0{,}625 * (1 + \$C\$3) * B8 + 0{,}625 * \$C\$3 * B7.$$

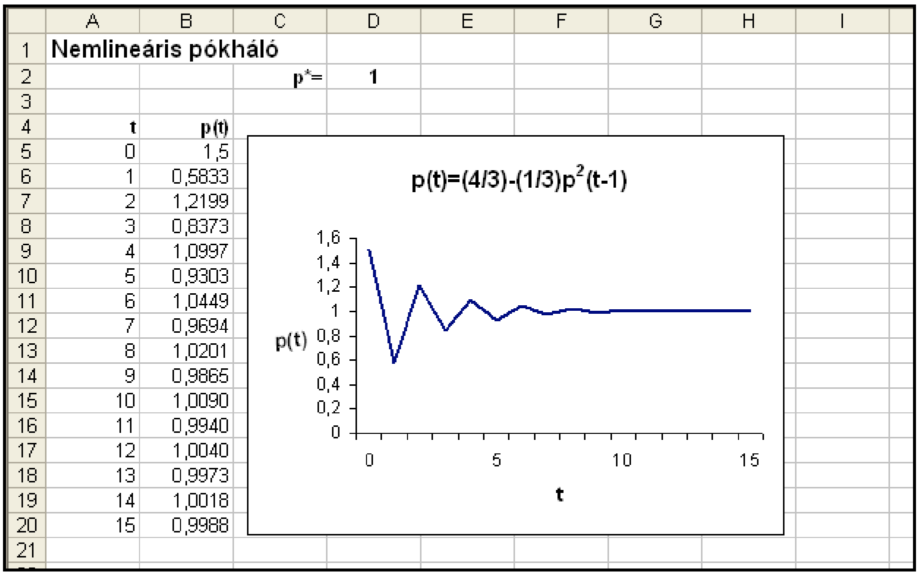
A *6. ábrán* az *r* értéket 0,5-nek vettük, a kezdeti árakat pedig a 0-s és 1-es időszakban egyaránt egységnyinek. Az eredmény egy divergáló árgörbe lesz. Most tartsuk meg a $p(0)=1$ és $p(1)=1$ értékeket és cserélgessük az *r* paraméter értékét. Kísérletezzünk a következő értékekkel: $r = -3;$ -0,1; 0,1; 1. Eredményül változatos görbéket kapunk.

7. NEMLINEÁRIS PÓKHÁLÓK

Táblázatkezelő használatának nagy előnye, hogy táblázatkezelővel még bonyolultabb nemlineáris modelleket is meg lehet vizsgálni, ráadásul többé-kevésbé ugyanazon a módon, mint a lineáris modellben. Tekintsük a következő modellt:

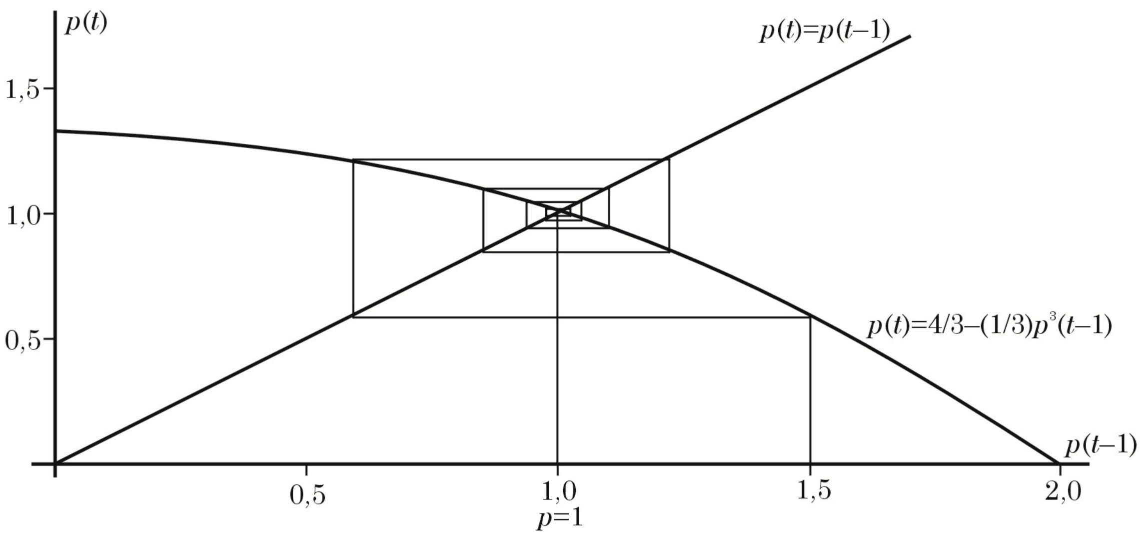
$$qd(\mathrm{t}) = 4 - 3p(t)$$
$$qs(\mathrm{t}) = (p^e)^2(t)$$
$$p^e(\mathrm{t}) = p(t-1)$$
$$q(t) = qd(t) = qs(t).$$

Ez a modell két fixpontot tartalmaz, az egyik a -4, a másik az 1.



t	p(t)
0	1,5
1	0,5833
2	1,2199
3	0,8373
4	1,0997
5	0,9303
6	1,0449
7	0,9694
8	1,0201
9	0,9865
10	1,0090
11	0,9940
12	1,0040
13	0,9973
14	1,0018
15	0,9988

7. ábra



8. ábra

A nemlineáris rendszerekkel igen óvatosan kell bánni, mert különösen bonyolult viselkedési formákat tudnak mutatni. Például, ha a táblázatkezelőben a $p(0) = 4$ kezdeti értéket állítjuk be, a rendszer azonnal a negatív fix pont fele lép és ott is marad! Mindazonáltal az 1-hez „közeli” kezdeti értékekre a rendszer oszcillálva ugyan, de konvergál az egyensúlyi árhoz, 1-hez.

8. FOLYTONOS TRAJEKTÓRIÁK KONSTRUÁLÁSA TÁBLÁZATKEZELŐVEL

Differenciálegyenletek illetve differenciál egyenlet-rendszerek közelítő megoldása is meghatározható táblázatkezelőben például az EULER-közelítés segítségével, ez utóbbit az alábbi példán mutatunk be.

Oldjuk meg az $\dot{x}(t) = f(x, y) = 9 - 2x - y$, $\dot{y}(t) = g(x, y) = 3 - y + x$, $x(0) = 2$, $y(0) = 2$ kezdeti érték feladatot.

Válasszunk kis lépésközt, $\Delta t = 0{,}05$-t és alkalmazzuk az $x(i+1) = x(i) + f(x(i), y(i))\Delta t$, $y(i+1) = y(i) + g(x(i), y(i))\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots$ EULER-féle közelítést. Innen $i = 0$-ra

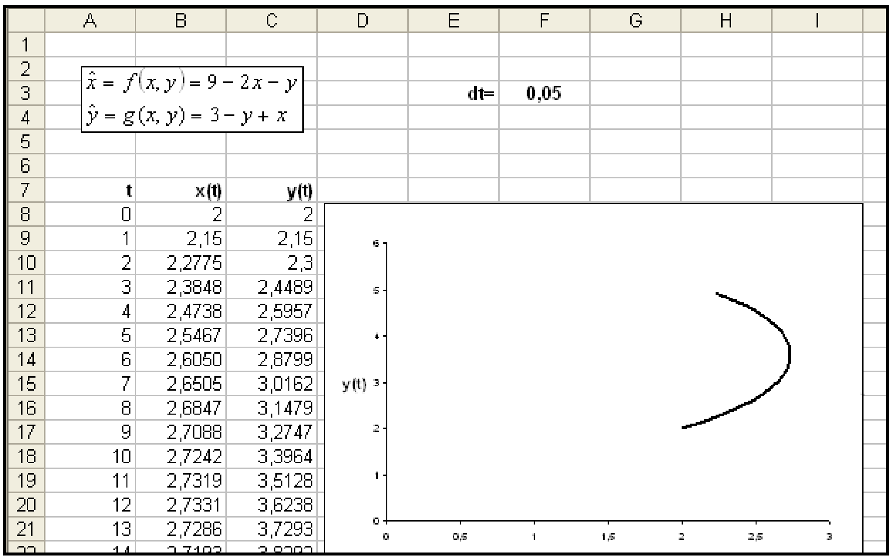
$$x(1) = x(0) + f(x(0), y(0))\Delta t, \quad \mathrm{f(x(0), y(0)) = 9 - 2x(0) - y(0)}, \text{ vagyis}$$

$$x(1) = x(0) + [9 - 2x(0) - y(0)]\Delta t,$$

illetve $y(1) = y(0) + g(x(0), y(0))\Delta t$, $g(x(0), y(0)) = 3 - y(0) + x(0)$, tehát

$$y(1) = y(0) + [3 - y(0) + x(0)]\Delta t.$$

A *9. ábrán* tüntettük fel a modell táblázatkezelős megoldását. A $\Delta t = 0{,}05$ lépésközt az F3 cella tartalmazza, az $x(0) = 2$ kezdeti értéket a B8 cella, míg az $y(0) = 2$ kezdeti értéket a C8 cella foglalja magába. Egy pillanatra az $x(0)$-t B8-al, $y(0)$-t C8-al azonosítva az **x(1)= x(0)+[9-2x(0)-y(0)]Δt** képlet szerint $x(1)$ az $= B8 + (9 - 2 * B8 - C8) * \$F\$3$ képlettel számítható ki célszerűen a B9 cellában. Hasonlóan adódik $y(1)$-re a **y(1)= y(0)+[3-y(0)+x(0)]Δt** összefüggés alapján az, hogy $y(1)$-nek az $= C8 + (3 - C8 + B8) * \$F\$3$ képlet felel meg értelemszerűen az $y(0)$-t tartalmazó C8 cella alatti C9 cellában. A B9 és C9 cellákat lejjebb másolhatjuk annyi sorba, ahány időszakot figyelembe akarunk venni. Ezeket a cellákat X-Y pontdiagramon szemléltetve kaphatjuk meg az alábbi modellt és a *9. ábrát*.



$\hat{x} = f(x, y) = 9 - 2x - y$

$\hat{y} = g(x, y) = 3 - y + x$

dt= 0,05

	t	x(t)	y(t)
8	0	2	2
9	1	2,15	2,15
10	2	2,2775	2,3
11	3	2,3848	2,4489
12	4	2,4738	2,5957
13	5	2,5467	2,7396
14	6	2,6050	2,8799
15	7	2,6505	3,0162
16	8	2,6847	3,1479
17	9	2,7088	3,2747
18	10	2,7242	3,3964
19	11	2,7319	3,5128
20	12	2,7331	3,6238
21	13	2,7286	3,7293

9. ábra

Az előadás nagy mértékben RONALD SHONE „An introduction to economic dynamics” című könyvére támaszkodott, amelyet a Cambridge University Press adott ki 2001-ben.