Dr. Zibolen Endre*

EGY GAZDASÁGI „MATHEMATICA" MODELLRŐL

Az előadás egy szokásos egyszerű közgazdasági mikromodellt mutat be, a MATHEMATICA név most az egyik legkorszerűbb szimbolikus és numerikus matematikai számítások elvégzésére egyaránt alkalmas, a Windows platformon is elérhető tudományos szoftvert fémjelzi. Először a modellel kapcsolatos közgazdasági és matematikai tudnivalók ismertetésére, majd az alkalmazott (számítógépes) számítási eljárások közlésére, végül a modell egy szoftveres megvalósítására kerül sor. Ezt a modellt és a hozzá hasonlókat a diákok módosíthatják, akár csak úgy is, hogy érzékenységvizsgálatot végeznek például különböző paraméterek illetve függvényspecifikációk mellett. Amennyiben lehetőség kínálkozna a tárgyalandóhoz hasonló modellek oktatásban történő hasonló bemutatására, úgy elsőként a korábbi tanulmányokból nem ismert közgazdasági modelleket lenne érdemes áttekinteni, majd másodikként a minimálisan szükséges algoritmusok és numerikus módszerek megismerésére lenne célszerű a hangsúlyt helyezni. Talán felfedezhetnénk annak a lehetőségét is, hogy a közgazdaságtan tanításában az előadás-vizsga alapú rendszert a gyakorlat-papír alapú rendszer esetleg színesíthesse. Ez szerencsés esetben kiválthatná a diákoknak még a korábbinál is nagyobb kreatív aktivitását, akár a modellek gyengeségeinek felfedésében, ideális esetben akár a modellek struktúrájának módosításában is.

A modell a mikroökonómia parciális piaci egyensúlyával foglalkozik kétféle jószágra vonatkozóan. Először ábrázoljuk a LEONTIEF-féle függvényt és a COBB-DOUGLAS féle függvényt 3 dimenzióban, illetve e függvények szintvonalait konkrét paraméterek esetén, megkeressük a vásárló maximális „hasznát" (megelégedettségét) költség korlát mellett, majd ábrázoljuk a jószágokra adódó keresleti függvényeket a megfelelő paraméter értékek leszűkítésével.

Tekintsük a két jószágra vonatkozó $f(x_1, x_2) = \min(a_1 x_1, a_2 x_2)$ LEONTIEF-függvényt, ahol a_1 és a_2 paraméterek, míg x_1 és x_2 a jószágakból elfogyasztott mennyiségeket jelölik. Ábrázoljuk ezt a függvényt $a_1 = a_2 = 1$ mellett a $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$ tartományon!

Az első MATHEMATICA inputként vigyük be az $a_1 = 1$ kifejezést ENTERREL, majd az $a_2 = 1$ kifejezést SHIFT-ENTERREL zárva le. Eredményül az alábbi inputok és outputok adódnak:

```
IN[1]:= a1=1
        a2=1
Out[1]= 1
Out[2]= 1
```

Definiáljuk a LEONTIEF-függvényt az alábbiak szerint Leontief néven!

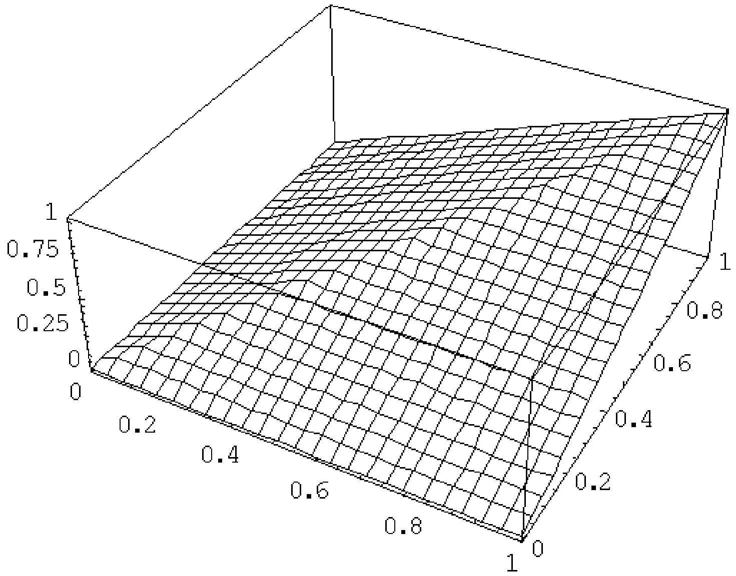
```
IN[3]:= Leontief = Min[a1 x1, a2 x2]
Out[3]= Min[x1, x2]
```

* BGF Külkereskedelmi Főiskolai Kar, Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, főiskolai docens.

Ábrázoljuk a LEONTIEF-függvényt a $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$ tartományon!

```
In[4]:= Plot3D[Leontief, {x1,0,1}, {x2,0,1}]
```

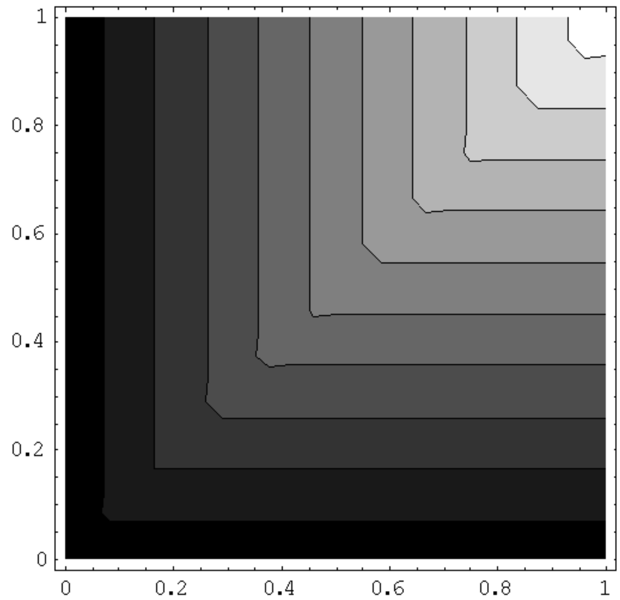
Az eredmény az *1. ábrán* látható.



Out[4]= SurfaceGraphics (*1. ábra*)

Ábrázoljuk a LEONTIEF-függvény szintvonalait, azaz a fogyasztó közömbösségi görbéit!

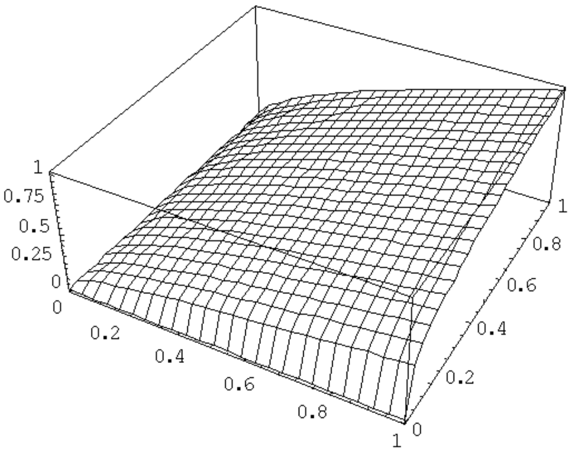
```
In[5]:= ContourPlot[Leontief, {x1, 0, 1}, {x2,0,2}]
```



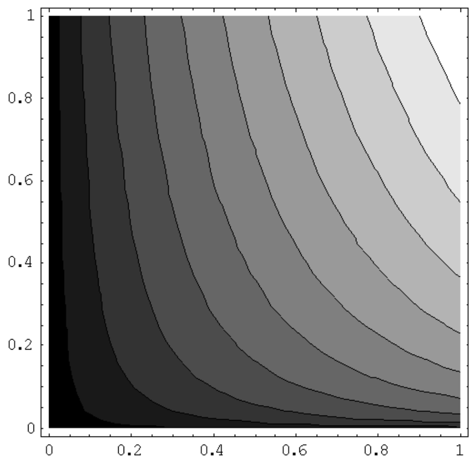
Out[5]= ContourGraphics (*2. ábra*)

Ábrázoljuk most az $x_1^{\rho} x_2^{1-\rho}$ Cobb-Douglas függvényt és szintvonalait $\rho = 0{,}7$ -re!

```
In[6]:= Clear[x1, x2, ρ];
        ρ = 0.7;
        CD = x1^ρ  x2^(1-ρ);
        Plot3D[CD, {x1, 0, 1}, {x2, 0, 1}]
        ContourPlot[CD, {x1 ,0, 1}, {x2, 0, 1}]
```



SurfaceGraphics - (*3. ábra*)



Out[6]= ContourGraphics - (*4. ábra*)

Keressük a vásárló maximális „hasznát" (megelégedettségét), tehát az $u = x_1^{\rho} x_2^{1-\rho}$ maximumát $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ költség korlát mellett, ahol ρ, p_1, p_2, m pozitív paraméterek, továbbá $0.5 < \rho < 1$!

Mivel *u* és log(*u*) egyszerre veszi fel a maximumát, bevezethetjük a *logu* változót, illetve *bc*-t:

```
In[7]:= logu = ρ Log[x1]+(1-ρ)Log[x2];
In[8]:= bc = m – (p1 x1 +p2 x2);
```

Képezzük a megfelelő LAGRANGE-függvényt (= = az egyenlőség jele, az = az értékadásé lesz):

```
In[9]:= eqL = L == logu+λ bc
Out[9]= L = = (m – p1 x1–p2 x2)λ + ρLog[x1]+(1-ρ)Log[x2]
```

Tegyük az *L* LAGRANGE-függvény elsőrendű parciális deriváltjait nullával egyenlővé!

```
In[10]:=foc1 = D[eqL, x1]
        foc2 = D[eqL, x2]
        Foc3 = D[eqL, λ ]
```

Out[23]= $0 == -p1\lambda + \frac{\rho}{x1}$

Out[24]= $0 == -p2\lambda + \frac{1-\rho}{x2}$

Out[25]= $0 == m - p1x1 - p2x2$

Keressük meg a *logu* és így ezzel egyúttal az *u* lehetséges maximumhelyeit:

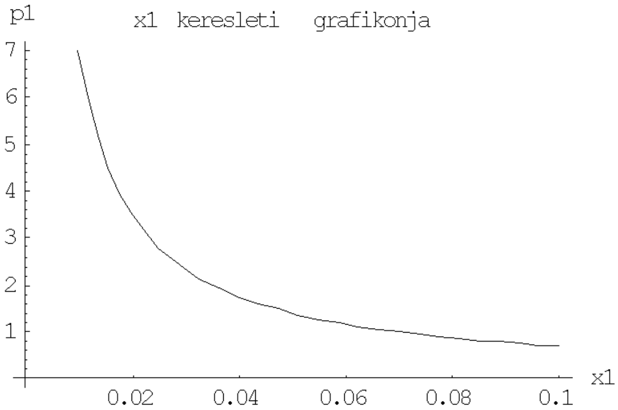
```
In[11]:=Solve[{foc1, foc2, foc3}, {x1, x2, λ}]
```

Out[11]= $\left\{\left\{\lambda \to \frac{1}{m}, x1 \to \frac{m\rho}{p1}, x2 \to \frac{m-m\rho}{p2}\right\}\right\}$

Ábrázoljuk az *x1*, *x2* keresleti függvényeket a ρ=0,7 *és m*=0,1 paraméterérték leszűkítéssel a $0{,}001 \le x1, x2 \le 0{,}1$ intervallumon! Az $x1 = \frac{m\rho}{p1}$ összefüggésből $p1 = \frac{\rho m}{x1}$ adódik.

```
In[12]:=p1 = ρ m / x1;
        Plot[p1  /. {ρ → 0.7, m → 0.1},
        {x1, 0.01, 0.1},
        AxesLabel → {„x1", „p1"},
        PlotLabel → „x1 keresleti grafikonja"]
```

Out[12]=

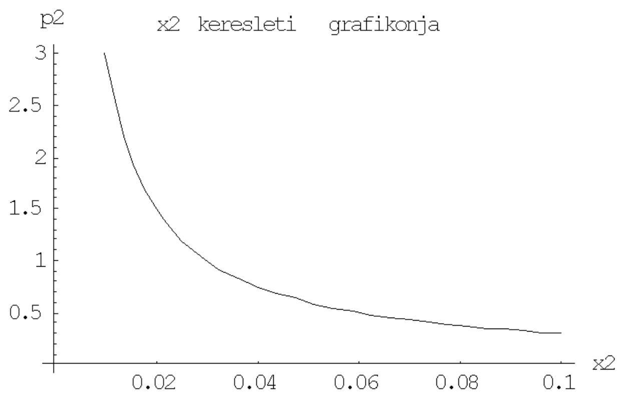


Graphics (*5. ábra*)

Hasonlóan adódhat a másik keresleti görbe ábrája: $x2 = \dfrac{m - m\rho}{p2}$ -ből $p2 = \dfrac{(m - \rho\, m)}{x1}$.

```
In[13]:=p2 = (m - ρ m) / x2;
        Plot[p2  /. {ρ  → 0.7, m →0.1},
        {x2, 0.01, 0.1},
        AxesLabel → {„x2", „p2"},
        PlotLabel → „x2 keresleti grafikonja"]
```

Out[13]=



Graphics (*6. ábra*)

A következőkben megkeressük a jószágokat előállító cég maximális profitját adott fajtájú technológia és adott egységárú input és output mellett. Ennek eredményeként megkapható lesz az első jószág kínálati függvényének inverze is, valamint a munka keresleti függvénye is, és természetesen e függvények ábrázolására is sor kerül.

A cég profitját a $\pi = p_1 x_1 - wL$ összefüggés írja le, ahol *L* a felhasznált munkát, *w* ennek az egységárát jelöli. A cég $x_1 = TL^b$ jószágot állít elő, ahol *T* és *b* technológiai paraméterek. A munkától, *L*-től függő profit:

```
In[14]:=pi = p1 T L^b – w L;
```

Ha π maximális, akkor π -nek az *L* szerinti deriváltja nulla. Oldjuk meg ezt *L*-re nézve!

```
In[15]:=Solve[D[pi, L]= = 0, L]
```

Out[15]= $\left\{\left\{L \to \left(\dfrac{w}{b\,p1T}\right)^{\frac{1}{-1+b}}\right\}\right\}$

Így maximum esetén $L = \left(\frac{w}{b * p1 * T}\right)^{\frac{1}{-1+b}}$. A π maximális értékét úgy kaphatnánk meg, hogy az L értékét behelyettesítjük a $\pi = p_1 x_1 - wL$ képletbe az alábbi helyettesítésekhez hasonlóan! (A maximális profithoz tartozó munkát jelölje *tempL*, a jószágmennyiséget *tempx1*.)

```
In[16]:=tempL = L /. %[[1]]
```

$$\text{Out[16]=}\left(\frac{w}{b\,p1\,T}\right)^{\frac{1}{-1+b}}$$

```
In[17]:=tempx1 = T tempL^b
```

$$\text{Out[17]=}T\left(\left(\frac{w}{b\,p1\,T}\right)^{\frac{1}{-1+b}}\right)^{b}$$

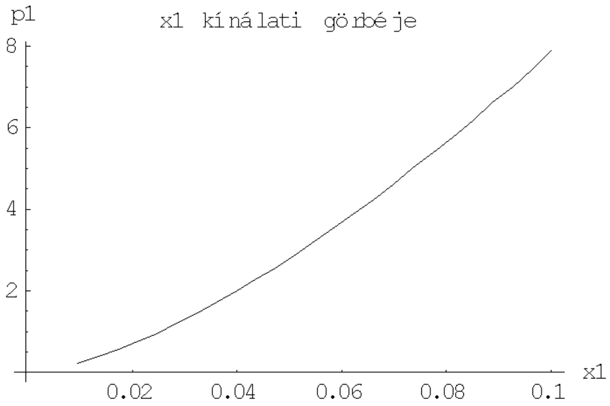
Fejezzük ki a maximumhoz tartozó *p1*-et a maximumhoz tartozó *x1*-gyel és ábrázoljuk!

```
In[18]:=eqx1 = x1 == tempx1;
        plotx1 =Solve[eqx1,p1]
```

$$\text{Out[18]=}\left\{\left\{p1\to\frac{w\left(\left(\frac{x1}{T}\right)^{\frac{1}{b}}\right)^{1-b}}{b\,T}\right\}\right\}$$

Ábrázoljuk az *x1* jószág kínálati függvényét!

```
In[19]:=tempp1 = p1 /. Plotx1[[1]];
        Plot[tempp1 /. {b → 0.4, T →1, w → 100} ,
        {x1, 0.01, 0.1},
        AxesLabel → {„x1”, „p1”},
        PlotLabel → „x1 kínálati görbéje”]
```



Out[19]= Graphics (*7. ábra*)

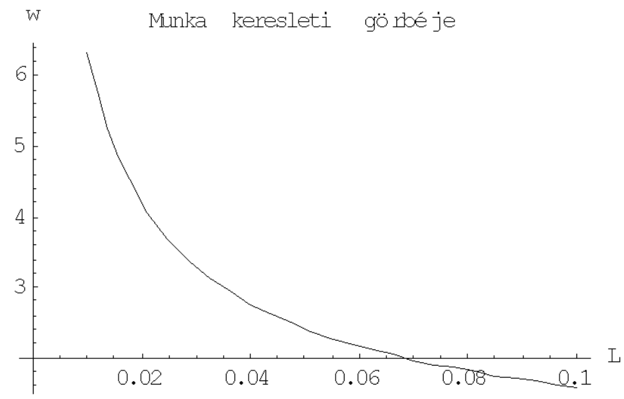
Hasonlóképpen állíthatjuk elő a munka keresleti görbéjét!

```
In[20]:=eqL = L = = tempL;
        plotL = Solve[eqL, w];
        tempw = w /. plotL[[1]]
        Plot[tempw /. {b → 0.4, T →1, p1 → 1},
        {L, 0.01, 0.1},
```

```
AxesLabel → {"L", "w"},
PlotLabel → "Munka keresleti görbéje"]
```

$b L^{-1+b}\ p1T$

Out[20]=



Graphics (*8. ábra*)

Az előzőek alapján a piaci egyensúly feltételét a kétféle – keresleti- és kínálati – egységár egyenlővé tételével kapjuk meg, ahonnan kinyerhetők az első jószág mennyiségének és az egységárnak az egyensúlyi értékei is. Az utóbbiak konkrét számértékeit megkapjuk, ha az összes paraméterértéket célszerűen a korábbiakkal összhangban rögzítjük. Természetesen a jószág, egységár egyensúlyi értékpárjai grafikusan is meghatározhatóak, amennyiben az előbb említett keresleti és kínálati függvények görbéit azonos koordinátarendszerben az első jószágmennyiség egy adott intervallumán ábrázoljuk.

Térjünk át a piaci egyensúly vizsgálatára!

Vezessük be az *x1* keresleti- és kínálati korábban meghatározott függvényeit most *p1* helyett *p1d* illetve *p1s* néven!

```
In[21]:=p1d = ρ m / x1;
        p1s = w (((x1 / T)^(1 / b))^(1-b)) / (b T);
```

Oldjuk meg a *p1d=p1s* piaci egyensúlyi feltételt *x1*-re nézve!

```
In[22]:=equilx1 = Solve[p1d = = p1s, x1]
```

Out[22]= $\left\{\left\{x1 \to m\left(\frac{T^{-1/b}w}{bm\rho}\right)^{-b}\right\}\right\}$

Számítsuk ki *p1d*-ből az egyensúlyi *x1*-nek megfelelő *equi1p1* egyensúlyi árat!

```
In[23]:=equilp1 = p1d /. equilx1[[1]]
```

Out[23]= $\left(\frac{T^{-1/b}w}{bm\rho}\right)^{b}$

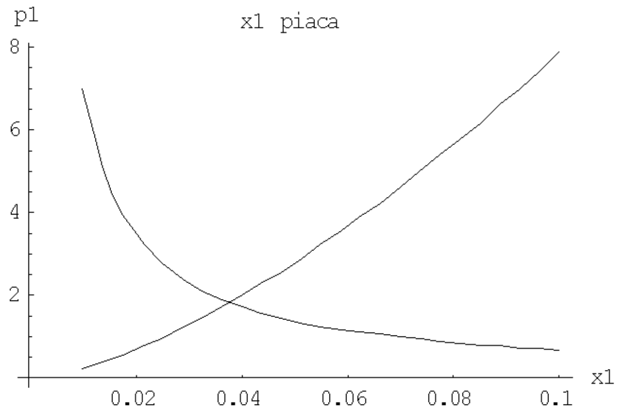
Határozzuk meg az egyensúlyi mennyiséget és árat (*equi1x1*-et, *equi1p1*-et) konkrét paraméterértékek mellett (ρ =0,7; *m*=0,1; *T*=1; *b*=0,4; *w*=1000)!

```
In[24]:=ρ = 0.7;
        m = 0.1;
        T = 1;
        b = 0.4;
        w = 100;
        equilx1
```

```
        equilp1
Out[24]={{x→0.0379196}}
        1.84601
```

A szóban forgó paraméterértékek mellett ábrázoljuk a *p1d* és *p1s* keresleti- és kínálati görbéket!

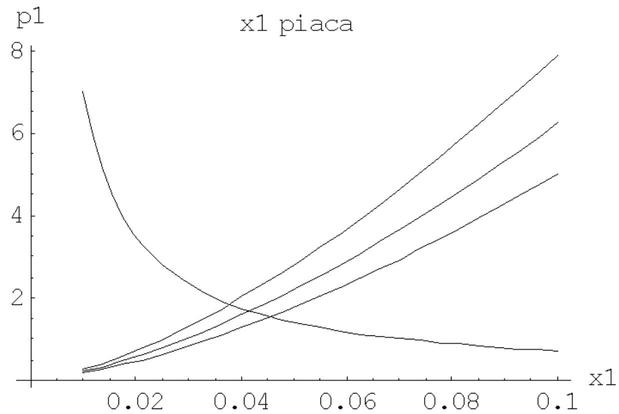
```
In[25]:=Plot[{p1d, p1s},
        {x1, 0.01, 0.1},
        AxesLabel → {"x1", "p1"},
        PlotLabel → "x1 piaca"]
```



Out[25]= Graphics (*9. ábra*)

Végezzünk el egy komparatív statikai gyakorlatot, a *T* technológiai paraméter értékeinek változtatásaival: *T*=1; *T*=1,1; *T*=1,2 mellett ábrázoljuk a *p1d*, *p1s* keresleti és kínálati görbéket!

```
In[26]:=Plot[Evaluate[Table[{p1d, p1s},{T,1,1.2,0.1}]],
        {x1, 0.01, 0.1},
        AxesLabel → {"x1", "p1"},
        PlotLabel → "x1 piaca"]
```

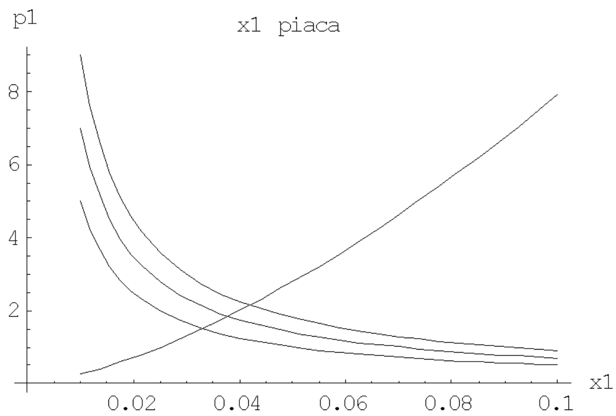


Out[26]= Graphics (*10. ábra*)

A jobboldali kínálati felső görbe T=1-nek, a középső T=1,1-nek, a felső T=1,2-nek felel meg.

Végezzünk hasonló kísérletet, de most a keresleti függvény ρ megosztási paraméterét változtassuk így: ρ =0,5; ρ =0,7; ρ =0,9.

```
In[27]:=Plot[Evaluate[Table[{p1d,p1s},{ρ,0.5,0.9,0.2}]],
        {x1, 0.01, 0.1},
        AxesLabel → {"x1", "p1"},
        PlotLabel → "x1 piaca"]
```

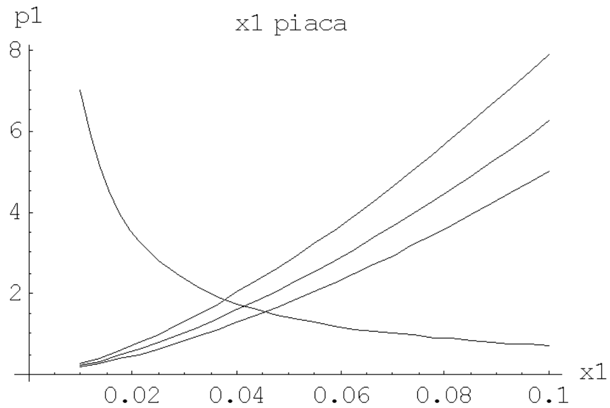



```
Out[27]=
```

Graphics (*11. ábra*)

Lezárásul elvégezzük ugyanazt a kettővel korábbi komparatív statikai gyakorlatot – *T*=1; *T*=1,1; *T*=1,2 –, de eredményül most animációt kapunk, ahol az állandó baloldali görbe a *p1d* keresleti görbéé, a felfele mozgó jobbholdali görbe a *p1s* kínálati görbéé. Az idő növekedésének *T* növekedése felel meg.

```
IN[28]:=Table[Plot[{p1d ,p1s }, {x1,0.01,0.1},
        PlotRange → {0,8},
        AxesLabel →{"x1", "p1"},
        PlotLabel → "x1 piaca"],{T,1,1.2,0.1}]
```




```
Out[28]=
```

Graphics (*12. ábra*)

A három emelkedő *p1s* kínálati görbe közül az animáció során először a jobb alsó görbe jelenik meg, majd ennek helyébe lép a középső, amit végül a legfelső vált le.

Bízva a hasznosságban, kielégítendő a saját érdeklődést, a számítások, ábrázolások további három programmal is elkészültek. A MATHEMATICA programmal versengő és a BGF-n több karon megtalálható Maple, illetve a több karon ismert – nem szolgáltatásiban igénytelen – és az adott esetben is elégséges színvonalon alkalmazható magyar nyelvű, különösen egyszerűen kezelhető Derive programmal valamint a Maple-höz hasonló, rendkívül rugalmas szerkesztési lehetőséggel rendelkező MathCAD-del. Helye lehet a gazdasági modellezés megfelelő területein még az Excel, Matlab, GAMS (vagy a LINDO), Duali, Access, GAUSS, Eview programoknak is. (A MATHEMATICA-nak, Maple-nek és a MathCad-nek, továbbá a Derive-nak első sorban a szimbolikus számításokban és az ábrázolásban juthat szerep, a Matlabnak főleg a vektor-mátrix számításoknál illetve nagyméretű feladatok megoldásánál stb.)

Az előadás DAVID A. KENDRICK (University of Texas) egy internetes – jelenleg már nem hozzáférhető – közlése alapján készült és a Maple, Derive és MathCAD programmal készített változata az alábbi internet-címen megtekinthető: www.freeweb.hu/ecomat.

Most megadjuk a MATHEMATICA-s megoldás Maple-s megfelelőjével kapott legfontosabb részeredményeit az outputok általános elnyomásával. Helykímélési célból és a szószaporítást elkerülendő, az ábrákat, illetve a magyarázó szövegeket nem közöljük, lényegében csak az ábrák MATHEMATICA-beli megfelelőjükre utalunk röviden.

```
> #########################
> # 1.1 Leontief függvény #
> #########################
> restart: a1:=1: a2:=1: Leontyev:=min(a1*x1,a2*x2):
  plot3d(Leontyev,x1=0..1,x2=0..1); with(plots):
  contourplot(Leontyev,x1=0..1,x2=0..1,filled=true);
```

(Lásd *1. ábra* és *2. ábra*.)

```
> #############################
> # 1.2 Cobb-Douglas függvény #
> #############################
> restart: x1:='x1': x2:='x2': rho:='rho': rho:=0.7:
  CD:=x1^rho*x2^(1-rho): plot3d(CD,x1=0..1,x2=0..1);
  with(plots):contourplot(CD,x1=0..1,x2=0..1,filled=true);
```

(Lásd *3. ábra* és *4. ábra*.)

```
> #####################################################
```

> # 3. Fogyasztói elmélet $\max u = x_1^{\rho} x_2^{1-\rho}$, $m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$ #

```
> #####################################################
> restart: rho:='rho': logu:=rho*log(x1)+(1-rho)*log(x2):
  bc:=m-(p1*x1+p2*x2): eqL:=L=logu+lambda*bc:
  foc1:=diff(eqL,x1): foc2:=diff(eqL,x2):
  foc3:=diff(eqL,lambda):
  solve({foc1,foc2,foc3},{x1,x2,lambda}); #szükséges feltétel:
```

$$x1 = \frac{\rho m}{p1}, \quad x2 = -\frac{m(-1+\rho)}{p2}, \quad \lambda = \frac{1}{m}$$

```
  {x1 = rho*m/p1, x2 = -m*(-1+rho)/p2, lambda = 1/m}
> p1:=solve(x1=rho*m/p1,p1): p1:=subs(rho=0.7,m=0.1,p1):
  plot(p1,x1=0.01..0.1,title="Demand curve for x1",
  titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["x1","p1"],
  labelfont=[TIMES,ITALIC,13]);
```

(Lásd *5. ábra*.)

```
> p2:=solve(x2=(m-m*rho)/p2,p2): p2:=subs(rho=0.7,m=0.1,p2):
  plot(p2,x2=0.01..0.1,title="Demand curve for x2",
  titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["x2","p2"],
  labelfont=[TIMES,ITALIC,13]);
```

(Lásd *6. ábra*.)

```
> ###############################################
```

> # 3. Termelési elmélet $\max \pi = p_1 x_1 - wL$, $x_1 = TL^b$ #

```
> ###############################################
```

```
> restart: pi:=p1*T*L^b-w*L: tempL:=solve(diff(pi,L)=0,L);
  # szükséges feltétel:
```

$$tempL := e^{\left(-\frac{\ln\left(\frac{p1\,T\,b}{w}\right)}{b-1}\right)}$$

```
> tempL:=simplify(tempL): tempx1:=T*tempL^b: eq1:=x1=tempx1:
  plotp1:=simplify(solve(eq1,p1)):
  plotp1:=subs(b=0.4,T=1,w=100,plotp1):
  plot(plotp1,x1=0.01..0.1,title="Supply curve for x1",
  titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["x1","p1"],
  labelfont=[TIMES,ITALIC,13]);
```

(Lásd *7. ábra*.)

```
> eqL:=L=tempL: plotL:=simplify(solve(eqL,w)):
  plotL:=subs(b=0.4,T=1,p1=1,plotL):
  plot(plotL,L=0.01..0.1,title="Labor demand curve",
  titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["L","w"],
  labelfont=[TIMES,ITALIC,13]);
```

(Lásd *8. ábra*.)

```
> ################################
> # 3. Piaci egyensúly p1d = p1s #
> ################################
> restart: p1d:=rho*m/x1; p1s:=w*(((x1/T)^(1/b))^(1-b))/(b*T);
  equi1x1:=simplify(solve(p1d=p1s,x1));
  equi1p1:=simplify(subs(x1=equi1x1,p1d));#kereslet, kínálat :
```

$$p1d := \frac{\rho\, m}{x1},$$

$$p1s := \frac{w\left(\left(\frac{x1}{T}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)}\right)^{(1-b)}}{b\,T}$$

```
> equi1x1:=simplify(solve(p1d=p1s,x1)):
  equi1p1:=simplify(subs(x1=equi1x1,p1d)): rho:=0.7: m:=0.1:
  T:=1: b:=0.4: w:=100: equi1x1; equi1p1;
  # Egyensúlyi x1 (keresleti), egyensúlyi ár :
```

$$.03791955329$$
$$1.846013308$$

```
> plot({p1d,p1s},x1=0.01..0.1,title="x1 piaca",
  titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["x1","p1"],
  labelfont=[TIMES,ITALIC,13]);
```

(Lásd *9. ábra*.)

```
> restart: with(plots): p1d:=rho*m/x1:
  p1s:=w*(((x1/T)^(1/b))^(1-b))/(b*T): rho:=0.7: m:=0.1:
  b:=0.4: w:=100:
  abra1:=plot({subs(T=1,p1d),subs(T=1,p1s)},x1=0.01..0.1,
  title="Market for x1 a T paraméter függvényében",
```

```
titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["x1","p1d-p1s"],
labelfont=[TIMES,ITALIC,13]):
abra2:=plot({subs(T=1.1,p1d),subs(T=1.1,p1s)}, x1=0.01..0.1,
title="x1 piaca a T paraméterfüggvényében",
titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["x1","p1d-p1s"],
labelfont=[TIMES,ITALIC,13]):
abra3:=plot({subs(T=1.2,p1d),subs(T=1.2,p1s)},x1=0.01..0.1,
title="x1 piaca a T paraméter függvényében",
titlefont=[TIMES,BOLD,15],labels=["x1","p1d-p1s"],
labelfont=[TIMES,ITALIC,13]):
display({abra1,abra2,abra3});
```

(Lásd *10. ábra*.)

Animáljuk a *10. ábra* görbéit a T mint idő függvényében:

```
> display({abra1,abra2,abra3},insequence=true);
```

Értelemszerűen az előző ábrához jutunk, amin a kínálati görbék alulról felfele fognak mozogni.