Dr. Horváth Gézáné Ph. D.*

ÉRTÉKELÉSI SZEMPONTOK SÚLYAINAK BECSLÉSE POSTERIORI VALÓSZÍNŰSÉGEKKEL

Doktori értekezésem írása közben - a Bayes döntési modell irodalmát tanulmányozva - találkoztam Forgó Ferenc (BKE) és G. J. Schick (International University Japan, Niigata) PU.M.A.-ban 1990-ben és 1991-ben megjelent tanulmányaival[1], amelyekben a Bayes modell alkalmazásának egy újabb területét írják le.

A téma két szempontból is érdekelt. Egyrészt a felsőoktatásban egyre inkább előtérbe kerül a minőségbiztosítás; ahol az oktatókat értékelő *kritériumok kiválasztása* és *súlyozása* egyaránt megoldásra váró feladat. Más oldalról a gazdasági alkalmazások közül a *termék / szolgáltatás / márka fejlesztésénél,* illetve *kifejlesztésénél* a piacképesség növelése szempontjából ugyancsak fontos a belső és külső *tulajdonságok súlyozott minősítése.*

A többszempontú sztochasztikus döntési problémáknál a kritériumok (értékelési szempontok) súlyainak körültekintő meghatározása az előttünk álló feladat. Ha például egy kritérium túl nagy súlyt kap a többiekhez viszonyítva, akkor a tényleges döntés nagy valószínűséggel csupán ezen kritérium alapján történik.

A ***Bayes modellben*** a döntéshozó által megadott ***a priori súlyok*** és a szakértői döntések ismeretében a Bayes tétel alkalmazásával generált ***posteriori súlyok szerepelnek.***

---

* főiskolai docens, tanszékvezető BGF-Külkereskedelmi Főiskolai Kar Matematika-Statisztika Intézeti Tanszék

[1] A Bayesian approach for updating weights of criteria decision problems . PU.M.A. sec. C, Vol. 1 (1990) No. 2-3, pp. 87.95.
Measuring teaching effectiveness of university professors: a Bayesian approach. PU.M.A. sec. C, Vol. 2 (1991), No. 1, pp. 43-58.

Az X_{ij} valószínűségi változó jelentse az *i-edik* kritérium alapján ($i = 1,2,...,m$) a *j-edik* ($j=1,2,...,n$) alternatívához tartozó *hasznosságot*.

Az X_{ij} eloszlása p_1, p_2, ..., p_m megegyezik a kritériumok a priori súlyaival, ahol $p_i \geq 0$, és $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

A modell számszerűsítéséhez felkérünk r számú szakértőt, hogy egymástól függetlenül n féle alternatíva közül m féle értékelési szempont alapján kritériumonként az általuk legjobbnak ítélt alternatívát válasszák ki.

Célunk az a priori súlyok és a szakértői értékelésen alapuló feltételes valószínűségek ismeretében a kritériumok poszteriori súlyainak meghatározása.

A szakértői vélemények konzisztenciáját az alábbi feltételezések biztosítják:

- ha egy szakértő a döntését csupán az *i-edik* kritérium alapján hozza meg, és a *j-edik* alternatívát választja, akkor az X_{ij} valószínűségi változóhoz tartozó valószínűség nem lehet kisebb, mint az összes többi alternatívához tartozó valószínűség.

- ha egy szakértő a *j-edik* alternatívát választja a legjobbnak, akkor legalább egy kritériumra fenn kell állnia, hogy a *j-edik* alternatívához tartozó valószínűség nem kisebb az összes többinél, azaz $P(X_{ij} > X_{ik}) \geq 0$ minden k-ra.

Jelöljük C_i -vel azt az eseményt, hogy egy döntéshozó az *i-edik* kritérium alapján a legjobb alternatívát választja ki .

$A_j^{(l)}$ jelentse azt, hogy az *l-edik* szakértő ($l = 1,2,...,r$) a *j-edik* alternatívát választja a legjobbnak.

A $P(C_i) = p_i$ ($i = 1,2,...,m$) *a priori valószínűségek*, emlyek az egye kritériumok súlyait mutatják.

$P(A_j/C_i)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy az *i-edik* kritérium mellett nincsen jobb alternatíva, mint a *j-edik*, azaz $P(A_j / C_i) = P(\bigcap_{j \neq k} (X_{ij} \geq X_{ik}))$. Tehát a $P(A_j/C_i)$ feltételes valószínűségek kiszámításánál összegezni kell mindazon valószínűségeket, amelyek esetén a valószínűségi változókra fennáll $X_{ij} \geq X_{ik}$,*ha* $j \neq k$.

Jelölje $p_i^{(1)}$ az első szakértői választás utáni *poszteriori súlyokat*

$$p_i^{(1)} = P(C_i / A_j^{(1)}) = \frac{P(A_j^{(1)} / C_i)P(C_i)}{\sum_{k=1}^{m} P(A_j^{(1)} / C_k)P(C_k)} \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad (1)$$

Az így kiszámított *posteriori súlyok* a második szakértői választásánál *a priori súlyként* fognak szerepelni.

$$p_i^{(1,2)} = P(C_i / A_j^{(2)}) = \frac{P(A_j^{(1)} / C_i)p_i^{(1)}}{\sum_{k=1}^{m} P(A_j^{(2)} / C_k)p_k^{(1)}} \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad (2)$$

A Bayes tételt alkalmazva az eljárást tovább folytatjuk a súlyozás finomítása érdekében.

Az *r-edik* szakértő véleményének bevonása után jutunk el ahhoz a *poszteriori* valószínűséghez (*súlyhoz*) , amelynek kiszámításához a rendelkezésre álló összes szakértői véleményt figyelembe vettük:

$$p_i^{(1,2,\ldots,r)} = \frac{P(A_j^{(1)} / C_i)P(A_j^{(2)} / C_i)\ldots P(A_j^{(r)} / C_i)p_i}{\sum_{k=1}^{m} P(A_j^{(1)} / C_k)P(A_j^{(2)} / C_k)\ldots P(A_j^{(r)} / C_k)p_k} \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad (3)$$

A forrásként megjelölt tanulmányokban leírt ***modellt a BGF KKFK Matematika-Statisztika Intézeti Tanszéken elvégzett felmérés kiértékelésénél kíséreltem meg alkalmazni.***

Ismeretes, hogy a gazdasági felsőoktatásban a matematika (analízis, valószínűségszámítás) és a statisztika nem tartoznak a diákok kedvenc tantárgyai közé; ezért itt szeretném megköszönni kollégáimnak, hogy nem zárkóztak el a felmérés elvégzésétől.

A kérdőíves felmérés két *szakértői csoporttal* történt. Ezek kiválasztásánál figyelemmel voltam arra, hogy a kért információk ugyanazon előadókra vonatkozzanak.

Az *egyes számú szakértői csoportnak* a Külgazdasági szak III. évfolyam Logisztika specializáció alkalmazott *operációkutatást tanuló hallgatóit* választottam.

Az A_j alternatívákat *($j = 1,2,3.$) az egyes előadók* jelentik.

A vizsgálatba bevont C_i kritériumok - *értékelési szempontok* - az alábbiak:

$C_1 = T$: Az előadások milyen mértékben segítették a ***tanulást***?

$C_2 = SZ$: Az előadások ***színvonala*** mennyire felelt meg az elvárásainak?

$C_3 = M$: Az Ön megítélése szerint az előadó ***magyarázatai*** mennyire voltak érthetőek?

$C_4 = F$: A ***feladatmegoldások*** mennyiben segítették felkészülését a vizsgára?

$C_5 = H$: Hogyan értékeli az előadó ***segítőkészségét***?

$C_6 = E$: A ***vizsgán nyújtott teljesítményének értékelését*** mennyire tartja megfelelőnek?[2]

A valós információk érdekében a jövőben a válaszadásból ki kell zárni azokat a hallgatókat, akik a véleményezett előadásokat nem rendszeresen látogatják , ezért az újabb felméréskor a kérdőív módosítását tervezem.

Az *i-edik* kritérium a *j-edik* alternatívához tartozó hasznosságának mérése az alábbi skála szerint történt.

Gyenge	Az átlagosnál gyengébb	Átlagos	Jó	Kiváló
1	2	3	4	5

A kérdőívek kiértékelésekor előadónként egy-egy mátrixot (6 x 5) számszerűsítettem, amelynek sorai a *i-edik* kritérium hallgatói minősítések szerinti eloszlását mutatják. Az előadókra kritériumonkénti átlagot is számoltam.

[2] Ez utóbbi kritérium nem köthető előadóhoz. A vizsgáztatást matematikából három, statisztikából két tanár végezte.

1. táblázat

A legmagasabb átlagértékek előadóként

Előadó	Átlagérték	Kritérium
A_1	4,32	F
A_2	4,36	F
A_3	4,56	H

Az A_1 előadónál a 4,32 *legmagasabb átlagérték* az F kritériumnál, az A_2 előadóra a 4,36 szintén az F kritériumnál adódott, míg az A_3 előadót a H kritérium szerint értékelte 4,56-ra.

2,97 -nál alacsonyabb átlagérték egyetlen előadóra, illetve kritériumra sem fordult elő.

A vizsga értékelésére kapott 3,52 ; 3,95 és 4,01 azt mutatja, hogy a diákok többsége reálisnak tartja a vizsgaeredményeket. (A matematika szigorlatnál kapott 3,52-os érték is kedvező eredménynek számít, mivel az eloszlás baloldali aszimmetriát mutat: a megkérdezett diákok 54%-a jó, vagy kiváló minősítést adott.)

2. táblázat

A kritériumok hasznosságának előadónként összesített eloszlása és az egyes előadók teljesítményére vonatkozó főátlagok

Alternatívák (előadók)	Kiváló (5)	Jó (4)	Átlagos (3)	Gyengébb az átlagnál (3)	Gyenge (2)	Átlagérték
A_1	0,305	0,357	0,238	0,087	0,013	***3,86***
A_3	0,283	0,242	0,288	0,147	0,040	3,66
A_2	0,227	0,313	0,300	0,130	0,030	3,54

A modellezés következő lépésében *az első szakértői csoport* értékítélete alapján *a feltételes és a poszteriori valószínűségeket* számszerűsítettem.

Az a priori valószínűségek értékét - feltételezve, hogy az egyes kritériumok fontossága azonos - 1/6-nak választottam.

A $P(A_1/C_i)$ új információt tartalmazó feltételes valószínűségeket kritériumonként ($i = 1,2,...,6$) a legmagasabb átlagot elért A_1 előadó szerint számoltam. Azokat az eseteket kellett számításba venni, ahol az A_1 előadó értékelése *jobb volt* az A_2 -nél és az A_3 -nál; ahol *nem volt rosszabb* a másik kettő minősítésénél , illetve amikor a három előadó értékelése *megegyezett*.

A szorzási szabályt alkalmazva az *a priori valószínűségekkel* és az új információkat tartalmazó *feltételes valószínűségekből* $P(A_1/C_i)P(C_i) = P(A_1 \cap C_i)$ együttes valószínűségeket számítottam. A teljes valószínűség tételével meghatároztam, hogy az első szakértői csoport az A_1 előadót milyen valószínűséggel értékelte a legjobbnak. Ezután a Bayes tétellel megbecsültem az egyes kritériumok *poszteriori súlyait*. Az eredményeket táblázatba foglaltam.

3. táblázat

Az értékelési szempontokhoz tartozó a priori súlyok, feltételes valószínűségek és a poszteriori súlyok

Kritériumok C_i	A priori súlyok $p_i = P(C_i)$	Új információk $P(A_1^{(1)}/C_i)$	Együttes valószínűségek $P(A_1^{(1)} \cap C_i)$	Poszteriori súlyok $P(C_i / A_1^{(1)})$
T	1/6	0,342741	0,057124	0,152
SZ	1/6	0,473302	0,078884	0,210
M	1/6	0,460076	0,076679	0,205
F	1/6	0,344218	0,057370	0,153
H	1/6	0,317604	0,052934	0,141
E	1/6	0,311741	0,051957	0,139
Együtt	1,0	-	$P(A_1^{(1)}) = 0,375$	1,000

Levonható következtetések:

- A logisztika specializációs hallgatók az A_1 előadót 37,5%-os valószínűséggel választották a legjobbnak.
- Az előadók értékelésénél az előadások (SZ) színvonalára 21%-os és a magyarázatok (M) érthetőségére 20,5%-os az átlagosnál nagyobb súllyal érdemes szerepeltetni. A következő csoportban 15,2%-os, illetve 15,3%-os súllyal szerepel az előadások és a feladatmegoldások jelentősége a tanulás segítésében.

A második szakértői csoportnak az Újabb Diplomás Külgazdasági Szak I. évfolyam levelező tagozatos hallgatóit választottam. Ebben az esetben az analízis és valószínűségszámítás előadókra vonatkozott a vizsgálat, tehát az alternatívák száma kettő volt.

4. táblázat

A kritériumok hasznosságának átlagértékei előadónként

	Értékelési szempontok					
Előadó	T	SZ	M	F	H	E
A_1	3,58	3,66	3,66	3,61	4,11	3,92*
A_2	3,92	3,98	3,81	4,15	4,29	4,19*

* A vizsgáztatás értékelése nem köthető előadóhoz.

A legmagasabb átlagérték mindkét előadónál a „Hogyan értékeli az előadó segítőkészségét?" - a levelezős hallgatók szempontjából igen fontos kérdésre adódott. *3,58-nál* alacsonyabb átlagérték egyetlen relációban sem fordult elő.

5. táblázat

A kritériumok hasznosságának előadónként összesített eloszlása és az előadók teljesítményére vonatkozó főátlagok

Alternatívák (előadók)	Kiváló (5)	Jó (4)	Átlagos (3)	Gyengébb az átlagnál (2)	Gyenge (1)	Átlagérték
A_2	0,38	0,35	0,21	0,05	0,01	***4,04***
A_1	0,27	0,35	0,27	0,10	0,01	3,77

A levelező tagozatos hallgatók magasabbra értékelték az előadók teljesítményét, mint a nappali tagozatos szakértői csoport.

A modellezés második szakaszában a $P(C_i / A_j^{(l)})$ posteriori valószínűségekkel becsültem meg a $p_i^{(l)}$ *a priori súlyokat.*

A poszteriori súlyokat a második szakértői csoport választása után a (2) képletet alkalmazva a magasabb átlagot elért A_2 előadó szerint számszerűsítettem.

6. táblázat

Az értékelési szempontokhoz tartozó a priori súlyok, feltételes valószínűségek és a poszteriori súlyok a második szakértői csoport bevonása után

Kritériumok C_i	A priori súlyok $p_i^{(1)}=P(C_i/A_1^{(1)})$	Új információk $P(A_2^{(2)}/C_i)$	Együttes valószínűségek $P(A_2^{(2)} \cap C_i)$	Poszteriori súlyok $p_i^{(1,2)}=(C_i/A_2^{(2)})$
T	0,152	0,5916	0,0899	0,1559
SZ	0,210	0,5962	0,1252	0,2171
M	0,205	0,5425	0,1112	0,1929
F	0,153	0,6438	0,0985	0,1709
H	0,141	0,5661	0,0798	0,1384
E	0,139	0,5170	0,0719	0,1247
Együtt	1,000	-	$P(A_2^{(2)}) = 0,5765$	1,0000

Levonható következtetések:

- A levelezős hallgatók az A_2 előadót *57,65 %-os* valószínűséggel választották jobbnak.
- Az előadók értékelésénél az (SZ) előadások színvonala (21,7 %) és a (M) magyarázatok érthetősége (19,3 %) mellett a (F) feladatmegoldások jelentősége (17,1%) az átlagos 1/6-nál nagyobb súllyal szerepeltetendő.
- „A vizsgán nyújtott teljesítmény értékelését mennyire tartja megfelelőnek?" szempont jelentősége az előadók értékelésénél tovább csökkent, 13,9%-ról 12,5 %-ra.

Az előadói teljesítmény méréséhez választott ismérvek köre bővíthető; a szakértői csoportok megkérdezésének időpontja, helye - újabb megfontolások figyelembevételével - megváltoztatható.

Az előadókat *értékelő szempontok súlyai* a hallgatók véleménye alapján a Bayes modellel évente újraszámíthatók.

A Bayes modell ilyen célú alkalmazására a marketingkutatásban is mód van. Tervezem a terméket/szolgáltatást jellemző - piacképesség szempontjából fontos - fogyasztói preferenciák becslését poszteriori valószínűségekkel.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Forgó, F. - Schick, G. J. : A Bayesian approach for updating weights of criteria decision problems. PU.M.A. sec. C, Vol. 1 (1990) No. 2-3, pp. 87 95.

2. Forgó F. - Schick, :Measuring teaching effectiveness of university professors: a Bayesian approach. PU.M.A. sec. C, Vol. 2 (1991), No. 1, pp. 43-58.

3. Horváth Gézáné dr. : Üzleti előrejelzések sztochasztikus módszerekkel, különös tekintettel a Markov lánc modell és a Bayes elemzés felhasználására. Doktori (Ph. D.) értekezés 5.1 A Bayes tételen alapuló döntési modell pp124-130.