
HORVÁTH GÉZÁNÉ*

A hazai készletmodellezés lehetőségei az Európai Unióban

Possibilities of Hungarian Inventory Modelling in European Union

The Economic Order Quantity (EOQ) Model was the first inventory model all over the world. Management has been using it since 1916. It was applied in manufacturing and logistics in a wide range of fields. Modified models of EOQ are used today and will continue to be used in the future as well. The explanation of its popularity lies in the advantageous properties of the sensitivity analysis of the EOQ model.

In Hungary suppliers were in a monopolistic position between 1968 and 1990. Model A and B of PRÉKOPA–ZIERMANN (Hungarian Inventory Models) for the minimisation of the starting inventory were very popular and useful because they could prevent dead stocks piling up at manufacturing companies.

Nowadays these „Hungarian Inventory Models” and the Fix Order Quantities Models for measuring conditions of uncertainty can be applied in Hungary and the EU as well.

Rigorous limitation of storing dangerous material requires the further special modification of the EOQ models.

Hazánkban a „magyar készletmodellek” alkalmazási feltételei 1970 és 1990 között széles körben adottak voltak. Ezen megbízhatósági készletmodellekkel optimalizált kezdőkészletek segítségével lehetőség nyílt a folyamatos termelés és az elfekvő készletek keletkezésének a megakadályozására.

A piacgazdaságban a változó nagyságú kereslethez történő rugalmas alkalmazkodás a cégek számára alapvető feladat. Napjainkban megnőtt a jelentősége az EOQ klasszikus modell azon módosított változatainak, amelyek révén az ún. „újrarendelési pont” értéke optimalizálható. Az újrarendelési pont az a készletszint, amelynek elérésekor a folyamatos termelés biztosítása érdekében az optimalizált nagyságú rendelést fel kell adni. A tanulmányban azzal az esettel is foglalkozunk, amikor a rendelés teljesítésének ideje változó.

Az optimális tétel nagyság (Economic Order Quantity) klasszikus modelljét¹ 1916-tól napjainkig a világon széles körben alkalmazták és módosított változatait ma is alkalmazzák. A modell szigorúan determinisztikus input-output feltételrendszerre épül, azonban meglehetősen érzéketlen a kereslet várható nagyságára vonatkozó becslés pontatlanságára. Vajon mi a magyarázata e modell népszerűségének és aktualitásának? A választ a modell érzékenységvizsgálata révén kapjuk meg.

A modell számszerűsítésekor még nem ismert az időegységre jutó r kereslet, ezért a modellező a \hat{q}_0 „optimális” tétel nagyságát a becsült \hat{r} értékkel kénytelen számszerűsíteni. A becsült és a tényleges kereslet közötti kapcsolat az α szorzóval teremthető meg, azaz $\hat{r} = \alpha r$. Utólag – a tényleges kereslet értékének a

* BGF Külkereskedelmi Főiskolai Kar, Matematika-Statistika Intézeti Tanszék, tanszékvezető főiskolai tanár, PhD.

¹ Operációkutatás I. Matematika közgazdászoknak. Szerk.: dr. Tóth Irén Tankönyvkiadó Bp., 2000. p. 18-26.

felhasználásával – kiszámítható a vizsgált időszak $K(\hat{q}_0)$ készletezési költsége és a $K(q_0)$ optimális készletezési költség.

Bebizonyítható, ha a keresletre vonatkozó becslés nem kisebb a tényleges kereslet felénél, illetve nem nagyobb annak kétszeresénél; azaz ha

$$\hat{r} = \alpha r \quad \text{és} \quad \frac{r}{2} \leq \hat{r} \leq 2r, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2,$$

akkor a készletezés többletköltsége az optimális költség értékének legfeljebb 6%-a, mivel

$$\frac{K(\hat{q}_0)}{K(q_0)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \leq 1,06$$

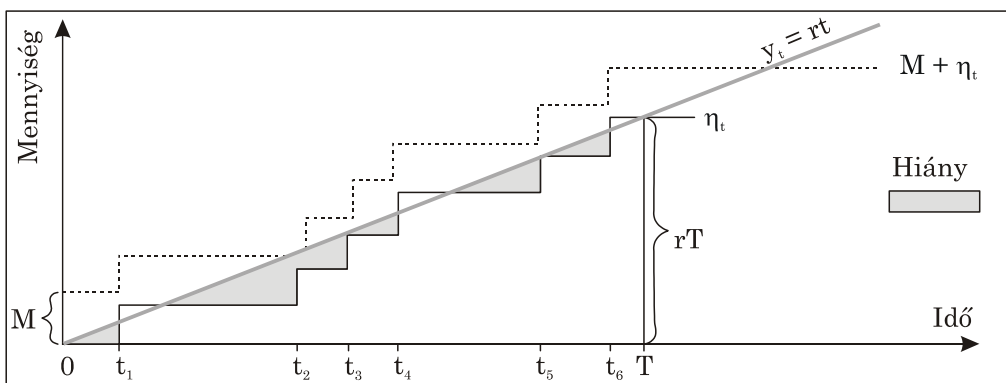
Hazánkban 1968 és 1990 között általános volt a hiánygazdálkodás. A szállítók monopol helyzete és az ún. előszállítós rendszer új típusú készletmodellek kifejlesztésére készítette a magyar operációkutatás szakembereit. *A piactudomány feltételeinek megfelelő költségminimalizáló készlet modellek nem voltak alkalmasak az „előszállítós rendelésre-teljesítés” modellezésére.*

A folyamatos termelés anyagellátása – véletlen beérkezési folyamat sokféle változata mellett – az előírt megbízhatósági szinten fenntartható volt a PRÉKOPA ANDRÁS, ZIERMANN MARGIT és tanítványaik által kidolgozott készletmodellekkel. Ezek a modellek a minimális kezdőkészlet (M) nagyságának meghatározására készültek. Alkalmasak voltak az elfekvő készletek felhasználásának megakadályozására és számszerűsítésükhöz nem volt szükség a költségtényezők megadására. A nemzetközi szakirodalomban a PRÉKOPA–ZIERMANN A és B modellek a legismertebbek.

A PRÉKOPA–ZIERMANN A modell¹ véletlen ütemezésű, egyenlő nagyságú részszállítmányok esetére készült. A szállítmányok nagysága előre ismert – a megrendelt rT mennyiség n -ed része – a szállítások időpontjai a $[0, T]$ időintervallumon egymástól független t_1, t_2, \dots, t_n valószínűségi változók, amelyek bármely lehetséges elhelyezkedése egyenlően valószínű.

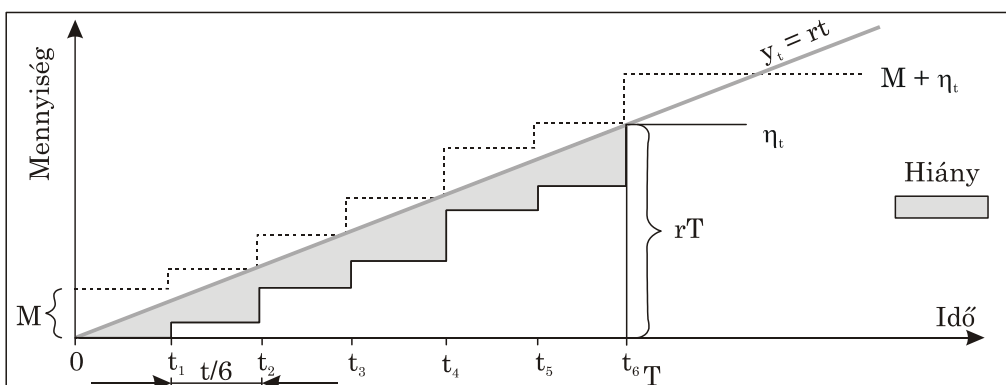
A modell a kezdőkészlet optimalizálására egyenlő ütemezésű, véletlen nagyságú részszállítmányok esetén is alkalmas. Ha a szállítások a $[0, T]$ intervallumon belül egyenlő időközökben, de véletlen nagyságú részletekben történnek, akkor matematikai szempontból csupán tengelytranszformációt kell végrehajtani.

¹ Dr. Horváth Gézánié: Megbízhatósági készletmodellek és számszerűsítésük. In: Operációkutatás I. Matematika közgazdászoknak. Szerk.: dr. Tóth Irén Tankönyvkiadó Bp., 2000. p. 48-52.



1. ábra

PRÉKOPA–ZIERMANN A modell véletlen ütemezésű részszállítmányok esetén



2. ábra

PRÉKOPA–ZIERMANN A modell véletlen nagyságú részszállítmányok esetén

Az optimális kezdőkészlet értéke mindkét esetben az alábbi képlettel számítható:

$$M \approx rT \sqrt{\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2n}}$$

ahol

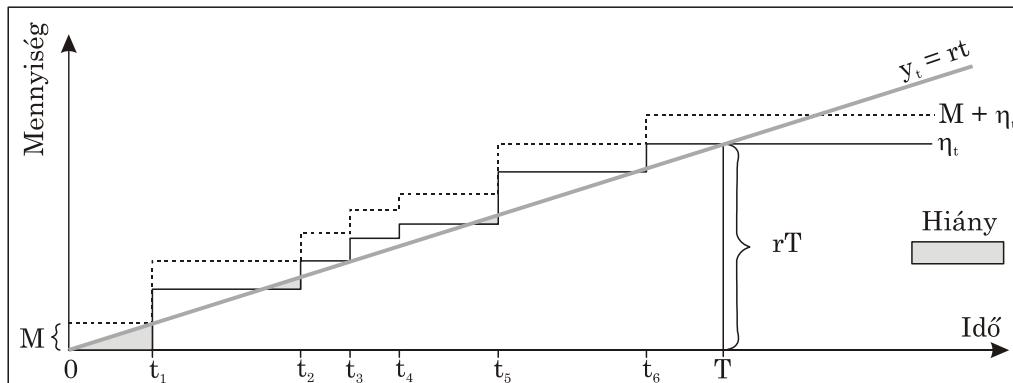
M a kezdőkészlet

n a szállítmányok száma

ε a kockázat mértéke

rT az időszak kereslete, illetve a megrendelt mennyiség.

A PRÉKOPA–ZIERMANN B modell¹ véletlen ütemezésű és nagyságú részszállítmányok esetén optimalizálja a kezdőkészlet nagyságát. A modellben tehát a részszállítmányok időpontja és nagysága egyaránt valószínűségi változó, ugyanakkor egy bizonyos – ésszerű nagyságrendű – $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{rT}{n} \right)$ mennyiség beérkezésével minden egyes részszállítmány alkalmával számolni lehet.



3. ábra
PRÉKOPA–ZIERMANN B modell véletlen ütemezésű
és nagyságú részszállítmányok esetén

Az optimális kezdőkészlet nagyságát az α minimális tétel nagyság értéke is befolyásolja, amelyet $K_n(\alpha)$ korrekciós tényezővel kell figyelembe venni.

Az optimális kezdőkészlet: $M_\alpha \approx MK_n(\alpha)$,
ahol

$$K_n(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{n-1}{n+1} \left(1 - \frac{n\alpha}{rT}\right)^2}.$$

PRÉKOPA ANDRÁS amerikai tapasztalatai alapján megállapítható, hogy a „magyar készletezési modellek” és továbbfejlesztett változataik az energiaszektorban, a papíriparban stb. a XXI. században is alkalmazhatók.

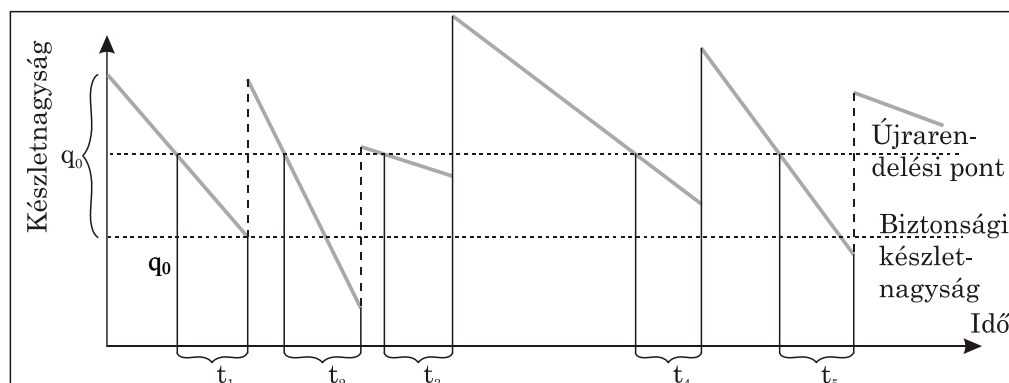
Napjaink piacgazdaságában a bizonytalansági tényező főleg a kereslet oldaláról jelentkezik. Piaci pozícióik megtartásához a kereslet változására a vállalatoknak rugalmasan reagálniuk szükséges. Az optimális tétel nagyság klasszikus modelljének az alábbiakban bemutatott két módosított változata alkalmas ezen probléma kezelésére is.

¹ Dr. Horváth Gézáne: Megbízhatósági készletmodellek és számszerűsítésük. In: Operációkutatás I. Szerk.: dr. Tóth Irén. Matematika közgazdászoknak. Tankönyvkiadó Bp., 2000. p. 53-56.

Fix rendelési tétel modell véletlentől függő diszkrét kereslet esetén¹

Ha az EOQ-modellt véletlen kereslet mellett kívánjuk alkalmazni, akkor számunkra a fix rendelési tétel nagyságon kívül az ún. „újrarendelési pont” (ROP) meghatározásának van döntő jelentősége. Az ROP a lehetséges újrarendelési pontok közül a legkisebb várható költséghez tartozó készlet nagyság. Az *újrarendelési pont (ROP)* tehát az a készlet szint, amelyre a raktárkészlet lecsökkenéskor a rendelést fel kell adni.

Egyenletes kereslet esetén az ROP csupán az utánpótlási idő hosszától és a determinisztikus napi kereslet nagyságától függ. *Ha a kereslet nem egyenletes*, akkor az *újrarendelési időpontja nem határozható meg előre*, mert a rendelések között eltelt idő a kereslet függvényében változik. A termelő, illetve a szolgáltató cégek optimális készletezési eljárásához az ROP újrarendelési pont meghatározása elegendő. A raktárkészlet alakulásának ismeretében a q_0 optimális rendelési tétel nagyság megfelelő időben – amikor a készlet az újrarendelési pontra lecsökken – kell feladni.



4. ábra
Készletmodell véletlen kereslet esetén

A helyesen megállapított ROP megakadályozza az indokolatlan elfekvő készletek, illetve a készlet-hiányok kialakulását, valamint az ezekkel felmerülő többletköltségek jelentkezését.

A modell feltételrendszere:

1. A vizsgálat egyéves időintervallumra vonatkozik.
2. A kereslet nagysága a vizsgált időszakon belül a véletlentől függő diszkrét mennyiségek sorozata. $R_{\min} \leq R_i \leq R_{\max}$ $i=1,2,\dots,n$. A kereslet nagysága ξ diszkrét valószínűségi változó, amelynek empirikus eloszlása megbecsülhető:

¹ Dr. Horváth Gézáne PhD: Egy újrarendelési pontot optimalizáló készletmodell. Szakmai Füzetek. (Külkereskedelmi Főiskola Tudományos Tanácsa kiadványa) Bp., 1997. p. 27-30.

$$P(\xi = R_i) = p_i, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

3. Az utánpótlási idő előre ismert és konstans.
4. A beszerzési ár (p) és a rendelési költség (c_1) szintén állandó, és független a szállítmány nagyságától. A fajlagos készlettartás éves költsége: c_2 .
5. A rendelési tétel az EOQ modell szerint meghatározott fix mennyiség

$$EOQ = \sqrt{\frac{2Rc_1}{c_2}}$$

ahol

EOQ az optimális rendelési tétel nagyság

R az éves kereslet nagysága

c_1 a fix rendelési költség rendelésenként

c_2 a fajlagos éves raktározási költség

6. A készlethiány költsége rendelésenként: c_H .

7. *A rendelések feladása között eltelt idő az ROP újrendelési pont értékétől és a kereslet alakulásától függően változik.*

A lehetséges R_j újrendelési pontokhoz a várható keresleti értékek eloszlásának ismeretében

- a többletkészlet várható nagyságát és költségét,
- a készlethiány várható nagyságát és költségét,
- a teljes várható költséget ($TC(q)$) ki tudjuk számítani

Az ROP újrendelési pont a lehetséges újrendelési pontok közül a legkisebb teljes várható költséghez tartozó készlet nagyság lesz. Az újrendelési pont ismeretében – az alábbi költségfüggvény szélsőértékének meghatározásával – az EOQ modellel becsült *fix rendelési tétel nagyságot* optimalizáljuk:

$$TC(q) = c_1 \frac{R}{q} + c_H \frac{R}{q} + c_2 \frac{q}{2} + c_2 e = (c_1 + c_H) \frac{R}{q} + c_2 \frac{q}{2} + c_2 e$$

ahol

TC az éves teljes készletezési költség

q a rendelési tétel nagyság

c_1 a rendelési költség

R a becsült éves kereslet

$c_1(R/q)$ az éves rendelési költség

c_H a várható készlethiány költsége rendelésenként

$c_H(R/q)$ a várható készlethiány éves költsége

c_2 az egységnyi készletértékre vetített raktározási költség a vizsgált évben

$c_2(q/2)$ az átlagkészlet raktározási költsége

e az elfekvő készlet nagysága

$c_2 e$ az elfekvő készlet éves költsége.

Az éves teljes készletezési költség minimum értéke a

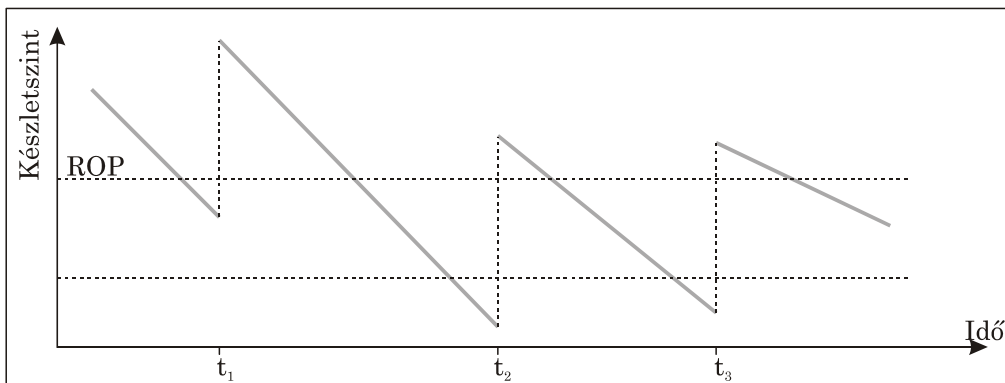
$$q_0 = \sqrt{\frac{2R(c_1 + c_H)}{c_2}},$$

ez a fix rendelési tétel optimális értéke. Könnyen belátható, hogy az EOQ-modell alapján számított rendelési tétel nagyság, az

$$EOQ = \sqrt{\frac{2Rc_1}{c_2}}$$

jó közelítését adja a q_0 optimális értéknek. Az eltérést a véletlen kereslet miatt várható készlethiány rendelésenkénti költsége okozza.

A készletmodellezésnél a *kereslet ingadozása mellett bizonytalansági tényezőzt jelenthet a beszerzések utánpótlási ideje is*, amely attól függően változik, hogy a szállítást készletből, vagy rendelésre-termeléssel teljesíti-e a beszállító.



5. ábra
Készletmodell véletlen kereslet és utánpótlási idő esetén

Fix rendelési tétel modell sztochasztikus kereslet és sztochasztikus utánpótlási idő esetén

Akkor alkalmazhatjuk ezt a modellt, ha nem ismerjük előre sem az utánpótlási idő hosszát, sem pedig az utánpótlási idő alatti kereslet nagyságát. A rendelések feladása közötti idő az *ROP*, azaz az optimális újrendelési pont értéktől, a kereslet alakulásától és az utánpótlási idő változásától függ.

A modell számszerűsítése, az újrendelési ponthoz tartozó optimális készletnagyság (*ROP*) meghatározása az *utánpótlási idő alatti kereslet eloszlásának vizsgálatával kezdődik*. A kereslet alakulása sok – egyenként kis jelentőséggel bíró független – tényezőtől függ; ezért normális eloszlással közelíthető. A normális eloszlást közelítő kereslet paramétereit (\bar{x} várható érték és σ szórás) kell megbecsülni. Amennyiben a kereslet és az utánpótlási idő hossza egymástól független – jelen esetben ez fennáll, hiszen a kereslet a vevőktől, az utánpótlási

idő pedig a beszállítóktól függ –, úgy az utánpótlási időre vonatkozó kereslet várható értékének és szórásának becslésére az alábbi képleteket használjuk:

$$X = \bar{r}(\bar{X}_{LT}) \quad \text{és} \quad \sigma = \sqrt{\bar{X}_{LT}(\sigma_r)^2 + \bar{r}(\sigma_{LT})^2}$$

ahol

\bar{X}_{LT} az átlagos utánpótlási idő

σ_{LT} az utánpótlási idő hosszának szórása

\bar{r} az átlagos napi kereslet

σ_r a napi kereslet szórása

A normális eloszlást követő kereslet paramétereinek ismeretében különböző megbízhatósági szintekhez kiszámítható a $ROP = \bar{x} + \lambda\sigma$ képlet alapján az ROP értéke, ahol λ a megbízhatósági faktor.

Az ROP újrarendelési pontot optimalizáló modellek alkalmazása viszonylag egyszerű számításokat igényel. Az eredmények hasznosíthatósága a lehetséges keresleti értékekre vonatkozó valószínűségek megbízhatóságától függ. A bemutatott két modell a piacgazdaságban, hazánk EU-csatlakozása után is széles körben alkalmazható lesz.

Az EU-csatlakozás a vállalkozásainkat szigorúbb környezetvédelmi előírások betartására fogja rákényszeríteni. A veszélyes anyagok tárolására vonatkozó korlátozások az ilyen anyagokkal dolgozó cégek készletezési szakembereit nehezen megoldható helyzet elé fogja állítani.

A készletmodellezés e körben is segítséget jelent az optimális beszerzési és készletezési stratégia kialakításában; nevezetesen a klasszikus EOQ-modellnek e speciális korlátozásokat is figyelembe vevő módosított változatainak alkalmazásával.