Jó kérdések, jó problémák
Gondolatok a felfedeztető matematikatanításról és a tehetséggondozásról

Dr. Kosztolányi József
egyetemi docens
SZTE TTIK Bolyai Intézet
E-mail: kosztola@math.u-szeged.hu

DOI: 10.29180/978-615-6342-90-4_1

Összefoglalás: A dolgozatban három matematikai probléma részletes matematikai és módszertani tárgyalásán keresztül illusztrálom elképzeléseimet a felfedeztető matematikatanításról, és annak tehetséggondozásban betöltött szerepéről. A problémák diákokkal történő tárgyalása során alapvető cél a problémamegoldási képességek fejlesztése és a matematikai felfedezés és kutatás metodológiai mérföldköveinek illusztrálása.

Kulcsszavak: felfedeztetés, problémamegoldás, tehetséggondozás, kérdések, kutatás

Abstract: In this short article I intend to illustrate my ideas about inquiry based mathematics teaching and learning and its role in talent management through a detailed mathematical and methodological discussion of three mathematical problems. When discussing problems with students, the basic goal is to develop problem-solving skills and illustrate the methodological milestones of mathematical discovery and research.

Keywords: inquiry based teaching and learning, problem-solving, talent management, questions, research

1. Mottók

„Arról szeretnék inkább beszélni, hogy mennyire tanítóinknak köszönhetjük érdeklődésünket a tudomány iránt, magatartásunkat a tudománnyal szemben. Az én történetem Magyarországon, a középiskolában kezdődött el, ahol matematikatanárom, Rátz László, könyveket adott nekem olvasásra, és érzéket fejlesztett ki bennem tárgyának szépsége iránt.” (Wigner Jenő, 1963)

„Mondhatom, hogy a jó versenyzők 90 százalékából jó matematikus lesz, ha ezt a pályát választják. Ugyanakkor lehet kitűnő matematikus azokból is, akik egyébként pocsék versenyzők voltak. Tehát a versenyen való jó szereplés

jelezheti a matematikai tehetséget, a kevésbé sikeres versenyzésből viszont nem vonhatunk le következtetést." (Reiman István)

„Számomra kicsit furcsa, de ma már tudomásul vettem, hogy a tehetséggondozás szót sok tanár – és a szakirodalom is! – sajátos értelemben használja: vagyis az egyes területeken kiemelkedően szereplő tanulókkal való foglalkozásként. Mégis, tegyük most meg, hogy a tehetséggondozás szót az eredeti jelentésében használjuk, és értsük ezen azt, hogy minden egyes tanuló tehetségének a bontogatásán munkálkodunk!" (Szendrei Julianna)

2. A problémamegoldási képességek fejlesztésének alapfeltételei (Erich Ch. Wittmann [2])

1. A tanulók ösztönzése a divergens gondolkozásra (többféle megfogalmazás; több irányból történő megközelítése ugyanannak a problémának; a matematika különböző területeinek összekapcsolása, a módszerek ötvözése; stb.).

2. Ismeretszerzés felfedeztető tanítás és tanulás révén.

3. Automatizált gondolatmenetek kizárólagos alkalmazásának háttérbe szorítása.

4. Nyitott problémák vizsgálata (nincs direkt kérdés, többféle kérdésfeltevés lehetséges, apró kutatási lehetőségek, stb.).

5. Ösztönözni kell arra a tanulókat, hogy maguk is vessenek föl problémákat.

6. Egy olyan „nyelv" kialakítása, amely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy gondolataikat ki tudják fejezni.

7. Intuitív indoklások, sejtések ösztönzése. (Egy kicsi, de önálló lépés többet ér, mint egy bemutatott gondolatmenet „lefényképezése".)

8. Heurisztikus stratégiák tanulása.

9. Konstruktív magatartás kialakítása a hibákkal szemben.

10. Diszkussziók, reflexiók, argumentációk ösztönzése.

3. Alapvető tehetséggondozási formák, lehetőségek

1. Összetett, több logikai lépést, eredeti ötleteket, különböző anyagrészek összekapcsolását igénylő feladatok, problémák megoldása a tananyag tartalmi keretein belül.

2. A normál tantervi követelményeket meghaladó, „extra” matematikai témakörök feldolgozása. (tagozatos osztályok, emelt óraszámú csoportok).

3. Speciális problémamegoldási módszerek (stratégiák, technikák, eszközök) versenyfeladatok megoldása során történő explicit tanítása/tanulása, versenyekre történő felkészítés/felkészülés, tréning.

4. A tanulók ösztönzése (ajánlás, irányítgatás, ellenőrzés) szakirodalom olvasásra, önálló problémamegoldásra.

5. Nyitott problémák kapcsán kérdések segítségével irányított (közös vagy önálló) kutató munka.

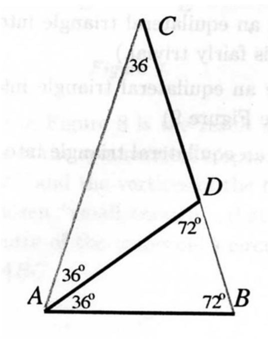
4. Példák „kutatási problémákra”

Módszertani mottó: *„Nem mellékes az sem, hogy mit mond a tanár az osztályban, de ezerszer fontosabb az, hogy mit gondol a diák! Az ötleteknek a diákok fejében kell megszületniük – a tanár csak bábáskodhat.”* (Pólya György)

A következőkben három olyan kutatási problémát, nyitott kérdést mutatok be módszertani szituációba helyezve, amelyek – véleményem szerint – jól illusztrálják a felfedeztető matematikatanítás és a tehetséggondozás egyik lehetséges módját. Mindhárom példát kipróbáltam különböző középiskolás csoportokban és a tapasztalataimat is beillesztettem az ismertetésekbe.

4.1. példa

Kiinduló helyzet: Hasonlóság tanítása kapcsán előkerül a „36, 72 fokos” egyenlő szárú háromszög (aranymetszés; szabályos tízszög, ötszög szerkesztése), amelyik két egyenlő szárú háromszögre bontható (1. ábra).



1. ábra

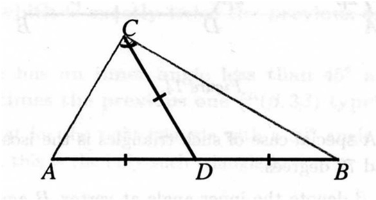
Kutatási probléma: Melyek azok a háromszögek, amelyek felbonthatók két egyenlő szárú háromszögre?

Lehetséges tanári kérdések:

1. Van-e még olyan „jól ismert” háromszög, amelyik rendelkezik ezzel a tulajdonsággal?
2. Milyen lehetőségek vannak az egyenlő szárú háromszögek szárainak elhelyezkedésére?
3. A háromszög (háromszögek) mely jellemzői (adatai) alapján lehetne leírni a megfelelő eseteket (háromszögeket)?

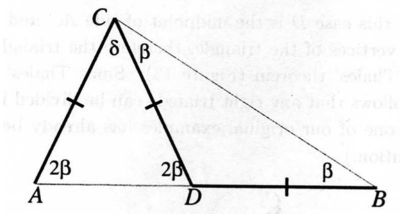
Megoldások:

(1) Derékszögű háromszögek (2. ábra)



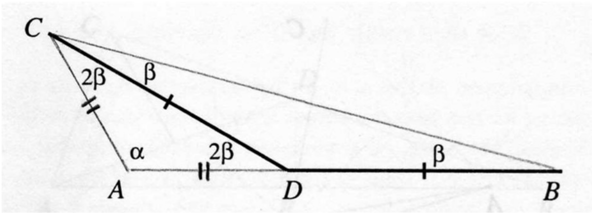
2. ábra

(2) Minden olyan háromszög, amelynek van egy olyan belső szöge (β), amely kisebb, mint 45º, és van egy 2β nagyságú belső szöge is. → **(β, 2β) típusú háromszögek** (3. ábra)



3. ábra

(3) Minden olyan háromszög, amelynek van egy olyan belső szöge (β), amely kisebb, mint 45º, és van egy 3β nagyságú belső szöge is. → **(β, 3β) típusú háromszögek** (4. ábra)



4. ábra

Továbblépési lehetőségek:

1. Az <u>általánosítás</u> irányába mutató kérdések:
   - Mely háromszögek bonthatók fel három darab egyenlő szárú háromszögre? (Lényegesen nehezebb kérdés!)
   - Mely háromszögek bonthatók fel négy egyenlő szárú háromszögre?
   - Mely pozitív egész *n* esetén bontható fel bármely háromszög *n* darab egyenlő szárú háromszögre? (Belátható, hogy $n \geq 4$ esetén bármely háromszög felbontható *n* darab egyenlő szárú háromszögre.)
2. A <u>specializálás</u> irányába mutató kérdések:
   - A két egyenlő szárú háromszögre bontható háromszögek közül melyek azok, amelyekre legalább az egyik háromszög szabályos?
   - Azok közül az egyenlő szárú háromszögek közül, amelyek két egyenlő szárú háromszögre bonthatók, melyekre teljesül, hogy az egyik részháromszög hasonló az eredetihez?

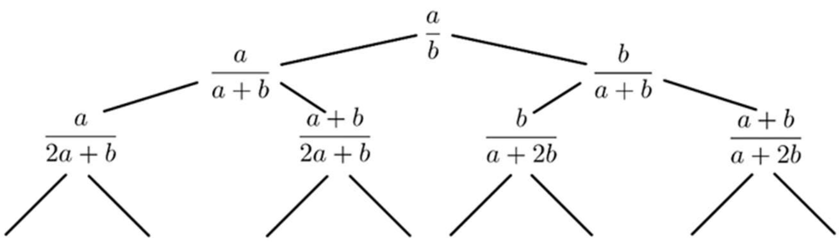
4.2. példa

A következő „törtfa” 0 és 1 közötti racionális számokkal kapcsolatos kérdéseket vet fel.

Kutatási probléma: Az *a* és *b* pozitív egészekre $0 < a < b$, valamint *a* és *b* relatív prímek. Az $\frac{a}{b}$ törtből kiindulva képezzük törtek egy végtelen családját a következőképpen:

1. az $\frac{a}{b}$ törtnek két „leszármazottja” van, a bal oldali $\frac{a}{a+b}$ (az eredeti tört számlálójának és a számláló és a nevező összegének hányadosa), a jobb oldali $\frac{b}{a+b}$ (az eredeti tört nevezőjének és a számláló és a nevező összegének hányadosa);

2. a leszármazottként kapott törtekből kiindulva ugyanígy folytatjuk az eljárást (5. ábra).



5. ábra

Kérdések:

1. Ha $\frac{a}{b}$ redukált tört (a és b relatív prímek), akkor van-e a „fában” nem redukált tört?
2. Benne van-e a „fában” az $\frac{1}{2}$? Ha igen, hol lehet?
3. Ha az $\frac{1}{2}$ benne van a fában, akkor benne van-e az összes 0 és 1 közötti racionális szám?
4. Sorozatba szedhetők-e a 0 és 1 közötti racionális számok?

Megoldások (vázlatosan):

(1) Tegyük fel, hogy $\frac{a}{b}$ redukált, és $\frac{a}{a+b}$ nem redukált. Ekkor

$$(a;\ a+b)=d>1 \Rightarrow d\,|\,a,\ \ d\,|\,(a+b) \Rightarrow d\,|\,(a+b-a)=b$$

(2) A „bal oldali leszármazottak” kisebbek $\frac{1}{2}$-nél, a „jobb oldali leszármazottak” nagyobbak $\frac{1}{2}$-nél. Az $\frac{1}{2}$ csak az „ős” lehet.

(3) Ha az $\frac{1}{2}$ az „őstört”, akkor mindegyik 0 és 1 közötti redukált tört benne van a fában. Bármelyik törtből indulva, a képzési szabályt visszafelé alkalmazva a tört nevezője mindig csökken, és a számláló mindig kisebb a nevezőnél.

(4) Felülről kezdve, egy sorban balról jobbra, majd soronként lefelé haladva sorszámozni tudjuk a törteket, tehát megszámlálhatóan sokan vannak.

4.3. példa

Kiinduló probléma: Keressünk olyan egész oldalhosszúságú derékszögű háromszögeket, amelyek kerületének és területének mértékszáma megegyezik.
Kutatási probléma: Hagyjuk el a „derékszögű” jelzőt. Melyek azok az egész oldalhosszúságú háromszögek, amelyek kerületének és területének mértékszáma megegyezik?
A kiinduló probléma megoldása:
Legyenek a háromszög befogói *a* és *b*, az átfogó *c*.
Ekkor

$$\frac{1}{2}ab = a+b+c = a+b+\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Ekvivalens átalakítások után

$$ab-4a-4b+8=0\ .$$

Szorzattá alakítva

$$(a-4)(b-4)=8\ .$$

Két megfelelő derékszögű háromszög van ($a \le b$ feltehető): $a=5$, $b=12$, $c=13$, illetve $a=6$, $b=8$, $c=10$.

Lehetséges tanári kérdések:

1. Vannak-e még a fentieken kívül a feltételeknek megfelelő speciális háromszögek?
2. Mit állapíthatunk meg a feltételnek megfelelő háromszögekről?
3. Mely összefüggések segítségével lehetne algebrai eszközökkel vizsgálni a problémát?
4. Hogyan lehetne előállítani az összes ilyen háromszöget?

A kutatási probléma megoldása (vázlatosan) a tanári kérdéseknek megfelelően:
(1) Nincs a feltételnek megfelelő szabályos háromszög, mert az *a* (pozitív egész) oldalhosszú szabályos háromszög területe irracionális.
(2) Minden megfelelő háromszög beírt körének sugara 2, ugyanis

$$T = r\cdot s = r\cdot\frac{a+b+c}{2} = a+b+c$$

(*r* a beírt kör sugara, *s* a félkerület, *a*, *b*, *c* az oldalhosszak).
(3) A probléma jellegéből adódóan a Héron-képletet érdemes alkalmazni. Ennek segítségével megmutatjuk, hogy nincs megfelelő egyenlő szárú háromszög.

$$\sqrt{s(s-a)^2(s-b)} = 2a+b = 2s$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2(2a-b)-16(2a+b)=0$$

$$\Downarrow$$

$$b = 2k \quad (k \text{ pozitív egész})$$

b párosságát felhasználva, átalakítások után kapjuk:

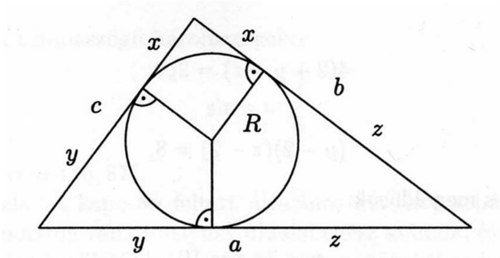
$$s = 2k + \frac{8k}{k^2 - 8} = 2k + n \quad (n \text{ pozitív egész}).$$

Ezt alakítva

$$nk^2 - 8k - 4n = 0\,.$$

Ennek a k-ra nézve másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa nem négyzetszám, ezért nincs racionális megoldása.

(4) Az általános eset vizsgálata. Feltesszük, hogy $a > b > c$, és legyen $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. Ezzel $x < y < z$ (6. ábra).



6. ábra

A kerület és a terület egyenlőségére vonatkozó egyenlet:

$$2(x + y + z) = \sqrt{(x + y + z)xyz}\,,$$

ahonnan átalakítások után

$$4(x + y + z) = xyz\,.$$

A feltételeket vizsgálva kiderül, hogy x lehetséges értékei: 1, 2, 3. A lehetséges értékeket az egyenletbe beírva kapjuk, hogy oszthatósági okokból x 3 sem lehet.

Az összes megoldást az alábbi táblázat mutatja.

1. Táblázat

x	*y*	*z*	*s=x+y+z*	*a=s–x*	*b=s–y*	*c=s–z*
1	5	24	30	**29**	**25**	**6**
1	6	14	21	**20**	**15**	**7**
1	8	9	18	**17**	**10**	**9**
2	3	10	15	**13**	**12**	**5**
2	4	6	12	**10**	**8**	**6**

Érdekesség: A három új háromszög (a két derékszögű háromszögön kívül) mindegyike tompaszögű, és a tompaszög nagysága mindhárom háromszögre ugyanakkora. Ez könnyen adódik, ha felírjuk a háromszögek területét kétféleképpen, és figyelembe vesszük, hogy a beírt kör sugara 2. Legyen a háromszögek legnagyobb szöge α. Ezzel

$$\frac{bc\sin\alpha}{2} = 2s \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{4s}{bc}.$$

A táblázatban pirossal jelzett háromszögekre $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, ahonnan, figyelembe véve, hogy α tompaszög, $\alpha \approx 126{,}87°$.

Azokat az egész oldalhosszúságú háromszögeket, amelyekre teljesül, hogy a terület és a kerület mértékszáma megegyezik, ***perfekt háromszögek***nek nevezzük.

5. Zárógondolatok

„…egy matematikai feladattal éppoly jól el lehet szórakozni, mint egy keresztrejtvénnyel, … az erőteljes szellemi munka ugyanolyan jó dolog, mint egy erős teniszjátszma. Ha valaki egyszer megízleli a matematika örömét, nem fogja egykönnyen elfelejteni.” (Pólya György)

„A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe a pillanatba nincs kitalálva, de az az út, melyen mentem, csaknem bizonyoson ígérte a cél elérésit, ha az egyébaránt lehetséges; nincs meg, de olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna elveszni; ha meglátja Édes Apám, megesmeri; most többet nem szóllhatok, csak annyit: hogy semmiből egy újj más világot teremtettem;…” (Bolyai János levele édesapjához, részlet, 1823. november 3.)

Irodalomjegyzék

[1] Cofman, Judita: *What to Solve? – Problems and Suggestions for Young Mathematicians,* ISBN 0 19 853294 6, Clarendon Press, Oxford, 1990

[2] Wittmann, E. Ch.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg, 1981

[3] Szendrei Julianna: *Gondolod, hogy egyre megy? – Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek*, ISBN 963 9548 52 9, Typotex Kiadó, Budapest, 2005

[4] Kosztolányi József: *Egy ötlet: Általánosítsunk!*, POLYGON XI. kötet 1. szám, 53-67. oldal, Szeged, 2002 június, ISBN 1215-3044

[5] Bonsangue, Martin V.; Gannon, Gerald E.; Buchmann, Ed; Gross, Nathan: *In Search of Perfect Triangles*, The Mathematics Teacher, Vol. **92**, No. 1. January 1999

[6] Kosztolányi József; Makay Géza; Pintér Klára; Pintér Lajos: *Matematikai problémakalauz I.*,ISSN 1218-4071 , POLYGON Kiadó, Szeged, 1999