A feltételes optimalizálás geometriai szemléltetése

Tóth Attila[1] – Szabó Tibor[2]
[1,2]egyetemi adjunktus
[1,2]Konstantin Filozófus Egyetem, Nyitra, Közép-európai Tanulmányok Kara, Pedagógusképző Intézet
E-mail: atoth2@ukf.sk, tszabo@ukf.sk
DOI: 10.29180/978-615-6342-61-4_4

Összefoglalás: A Lagrange feladatok megoldása helyett bizonyos esetekben ajánljuk a grafikus megoldásokat, ahol a célfüggvény egyenesének/síkjának párhuzamosaival vagy koncentrikus körökkel, esetleg más alakzatokkal közelítve a feltételek által határolt halmazához kapjuk meg az optimumot. A nemlineáris egyenlőtlenségeket ábrázolhatjuk például parabolákkal, körökkel, illetve térbeli alakzatokkal. Továbbá bemutatunk a komplementaritás elve alapján egy 3D transzponálási lehetőséget 2D-be, és vissza.

Kulcsszavak: feltételes optimalizálás, szemléltetés, komplementaritás.

Abstract: Instead of solving Lagrange's equations, we recommend geometric solutions, where the optimum is obtained by approximating the set of conditions with parallels of the main function's line or plane, or with concentric circles or other shapes. Nonlinear inequalities can be represented by parabolas, circles, or spatial shapes. Based on the principle of complementarity, we present a 3D transposition option into 2D and back

Keywords: conditional optimization, illustration, complementarity.

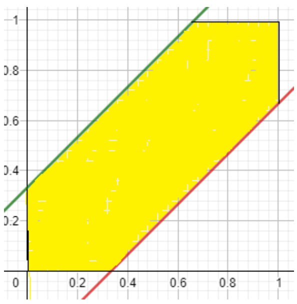
1. Bevezetés

A tanulmány által szeretnénk megemlíteni néhány konkrét feladat megoldását, melyeknél hangsúlyos figyelmet szentelünk a geometriai értelmezésre. Fontosnak tartjuk a helyes szemléltetést, nem szabad csak kizárólag az algebrai megoldási módszerekre hagyatkozni [1], [2], a hallgatóknak meg kell érteniük a köztük lévő kapcsolatot is. Az itt bemutatott példák főként a közgazdász szakirányú tanulmányi programok matematika oktatásába illeszkednek. Az általunk eddig ismert programozási feladatok főleg lineáris alakzatokkal foglalkoznak, illetve lineáris függvényekkel. Az bemutatott feladatainkban rámutatunk arra, hogy nemlineáris alakzatokkal is közelíthetünk a feltételek halmazához. A tanulmányban egymásra építve fokozatosan alakítjuk ki a térlátást, hogyan értelmezhető a legtöbb közgazdasági feladatok geometriai úton. Rámutatunk arra, hogy a feltételek halmaza, de maga a főfüggvény is lehet nemlineáris. Tehát nemcsak egyenesekkel, de koncentrikus körökkel is közelíthetünk a feltételek különböző halmazaihoz. Ismertetünk egy bonyolultabb feladatot, amelyet Lagrange egyenletrendszer segítségével oldunk meg algebrai úton, és koncentrikus körök segítségével közelítve a feltételek halmazához geometriai megoldást kínálunk, amit mindezidáig a szakirodalomban nem fedeztünk fel, tehát újszerű egy példán bemutatva.

2. Geometriai valószínűség

Első példaként tekintsünk egy egyszerű valószínűségi problémát, szeretnénk meghatározni annak az esélyét, hogy egy fiú és egy lány találkozik. A két személy a megbeszélésük alapján 12 és 13 óra körül szeretne találkozni, és egyforma feltételeket szabnak egymás irányában. Függetlenül egymástól érkeznek, és úgy döntenek, hogy az előbb érkező fél legfeljebb 20 percet hajlandó várni (tolerancia) a másikra, mielőtt távozna. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

A feladat a matematika nyelvén így írható fel: $\Omega = \{(x, y) \epsilon R^2; 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1\}$, ahol az összes lehetséges esemény egy 1x1-es egységnégyzet segítségével szemléltethető. A további feltételek félsíkokkal ábrázolhatók (ahol 20 perc=1/3 óra) ugyanis, ha az *A* személy érkezik előbb, akkor $x \leq y$ így $y \leq x + \frac{1}{3}$. Ha a *B* személy érkezik előbb, akkor y$\leq x$ így $x \leq y + \frac{1}{3}$. Ezek alapján az y értékeire érvényes, hogy $x - \frac{1}{3} \leq y \leq x + \frac{1}{3}$, ezzel együtt a feladat kezdeti feltételeit is figyelembe véve az 1. ábrán látható eredményhez jutunk. A megoldás csupán az egységnégyzet és a sárga síkidom területének egymáshoz viszonyított aránya. Azaz a grafikus megoldás az $y = x - \frac{1}{3}$egyenes feletti és az $y = x + \frac{1}{3}$egyenes alatti félsíkok közös halmazának, ami egy sáv, és annak metszete az összes lehetséges esemény halmazával, amelyet az 1x1 órás időintervallum határoz meg.



1. ábra A két személy találkozásának lehetséges esteit a sárga mező jelzi, ami az 1x1-es egységnégyzet része

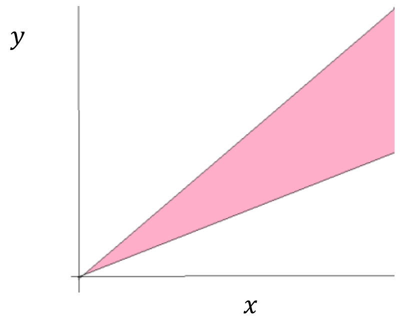
Forrás: saját szerkesztés

Az összes lehetséges esemény az egész egységnyi oldalú négyzet $m(\Omega) = 1$, ebből a találkozás eshetősége (a kedvező események halmaza) a sárga terület $m(G) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$. A találkozás valószínűsége $P = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9}$, tehát csak $55,\overline{5}$ százalékos [6].

3. Egy közgazdasági feladat vállalkozási mozgásterének szemléltetése

Az előző valószínűségi feladathoz hasonlóan a félsíkok ábrázolására hagyatkozva (illetve hasonlóan a többváltozós függvények értelmezési tartományának vizsgálatára), hasonlóan járhatunk el a határtermék értelmezésének esetében is. Itt geometriai úton szemléltethető a vállalkozók mozgástere is. Ezt a termelés által kialakított legalsó nem átléphető szinttel tudjuk behatárolni. Ha egy termelési célfüggvény kvadratikus, például az $f: z = 5xy - x^2 - 3y^2$, akkor az egyes bemenetekre meghatározott határtermékek az elsőrendű parciális deriváltak lesznek, azaz $MPD_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 5y - 2x$ és $MPD_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 5x - 6y$. Mivel a fenntarthatóság szempontjából a $\geq$ jelet kell alkalmazni, így ismét félsíkokról van szó. A halmazelméletből csak azt kell tudni, hogy ha a felső egyenes alatti, és az alsó egyenes feletti részről van szó, akkor a metszetük egy korridor. Ha emelkedő tendenciát mutatnak a termelést jellemző paraméterek, akkor [3][4]

$$5y - 2x \geq 0 \text{ és } 5x - 6y \geq 0.$$



2. ábra: A 0,83 és 0,4 iránytényezőjű egyenesek közé beékelt korridor

Forrás: saját szerkesztés

4. A diszkrimináló monopolista közgazdasági feladat mozgásterének optimalizálása és annak szemléltetése

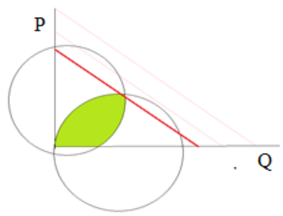
A közgazdasági feladatokban a monopolistaként emlegetett nyereségi egyenleteinek a megoldása teljes négyzetté való átalakítás következtében könnyen ábrázolható körök segítségével, ahol P az árakat és Q a mennyiségeket jelöli. A feltételeket körökkel lehet ábrázolni. Gyakorlatilag, ha az árak a mennyiség függvényében a következőképpen adottak $P_1 = 40 - Q_1$; $P_2 = 30 - Q_2$ és a költségek, kiadások pedig $C = 6Q = 6Q_1 + 6Q_2$, akkor a nyereség kifejezhető

$$\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - 6C = 40Q_1 - Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 6Q_1 - 6Q_2$$

alakban, ami összehasonlítható az $x^2 - 40x + 400 + y^2 + 30y + 225 = 625$ egyenlettel, így ez gyakorlatilag egy $[20; 15]$ középpontból szerkeszett 25 egységnyi sugarú körrel ábrázolható, ugyanis

$$(x - 20)^2 + (y - 15)^2 = 25^2.$$

Ha a cég két országban monopol helyzetben van, és az árak a fizetőképesség arányában változnak, akkor ezt országonként egy-egy kör reprezentálja, amit a célfüggvény párhuzamosaival optimalizálhatunk. Grafikus úton a megoldás a kvadratikus tagok kialakításával egyszerűsödik két körre, illetve azok belsejének a metszetére, ami a feltételek közös halmazát adja. Ehhez a 3. ábrán látható alakzathoz egy termelési célfüggvénnyel közelítünk felülről párhuzamos egyenesekkel, így határozható meg, illetve szemléltethető mértani úton a maximális nyereség, ami éppen a közös halmaz legfelső pontja lesz.



3. ábra: A feltételek közös halmazához közelítünk párhuzamos egyenesekkel

Forrás: saját szerkesztés

5. Lagrange feladatok, ábrázolásuk és grafikus megoldásuk

A következőkben összetettebb feladatokra, ill. azok megoldásaira térünk rá. Gondolunk itt például a jól ismert Lagrange és Kuhn-Tucker által algebrai módon megoldott feladataikra, melyek megoldását grafikus módon fogjuk szemléltetni. [5].

A következőkben meghatározzuk az $(x-1)^2+(y-3)^2$ célfüggvény minimumát az $x+y\leq 2;\ y\geq x;\ x\geq 0; y\geq 0$ feltételek mellett, azaz

$$\min(x-1)^2+(y-3)^2 \begin{cases} x+y\leq 2 \\ y\geq x \end{cases};\ x\geq 0; y\geq 0. \quad (1)$$

A feltételek linearitása miatt, azok könnyen helyettesíthetők egyenesekkel, illetve félsíkokkal, illetve ezek metszetével. A előző fejezetben bemutatott lineáris programozás célfüggvényének egyenesével pedig megközelíthető az így nyert alakzat maximális (pl. nyereség), ill. kiadás és költség minimális pontja [5].

Jelen esetben pedig nemlineáris megoldást keresünk, ebben a nemlineáris alakzatok (parabolák, körök) külsejét (ahogy a mi feladatunkban, lásd 4. ábra), vagy éppen belsejét vizsgáljuk, hogy hol metszik egymást, és a közös feltételek halmazát melyik pontban éri el majd a célfüggvény. Grafikus úton tehát máris leolvasható az optimális pont *(f*(x*,y*),..).*

A célfüggvény valójában egy kör egyenlete, ahol a sugarat változtatva, koncentrikus körök segítségével a feltételektől függően szerkeszthető meg a függvény minimumhelye. Azaz, ha koncentrikus körökkel közelítünk a sárga halmazhoz, a megoldás az a pont, ahol elérjük a sárga színnel jelölt közös halmaz (lásd 4. ábra) legközelebbi pontját a kör középpontjához viszonyítva. Így hasonlóan megoldható lenne a feladat maximalizálása is. Hiszen,

amennyiben elérnénk e háromszög legtávolabbi pontját, akkor a maximumot határoznánk meg.
Ha a grafikus megoldást ellenőrízni szeretnénk, akkor az optimumot (*max/min*) numerikus módon is meg kell határozni, így gyakorlatilag alapos matematikai alapokra van szükségük a hallgatóknak. Éppen ezért mutatkozik meg bizonyosfokú hiányosság, hiszen már a COVID-19 által előidézett vírushelyzet előtt is megjelentek tanulási nehézségek, és úgy általában talán a matematikához való viszony is romlott. Ebben a tanulmányban rámutatunk arra is, miért kell megtanulni a másodfokú egyenleteket, az analitikus geometria egyenleteit és egyenlőtlenségeit, a síkok és félsíkok metszeteit, és mi a jelentősége egy-egy metszéspontnak. Hiszen végeredményként a legtöbb esetben ez adja meg az optimális megoldást.
A grafikus ábrázolás, ill. a grafikus megoldások sok esetben mutatkoznak hatékonynak olyan módszerekkel is szemben, mint a fokozatos behelyettesítés vagy a simplex. Az (1)-ből előállított

$$\mathcal{L} = (x-1)^2 + (y-3)^2 + \lambda_1(x+y-2) + \lambda_2(\mathrm{x}-\mathrm{y})$$

Lagrange-függvény parciális deriváltjaiból adódó egyenletrendszernek megoldása néha grafikus módon egyszerűbben oldható meg, míg az algebrai megoldás bonyolultabb lehet, ahogy ezt itt is láthatjuk:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2(x-1) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2(x-1) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(x+y-2) = 0$$

$$\lambda_2(x-y) = 0$$

A megoldása aktív/inaktív módszerrel:
<u>1. eset:</u> ha $\lambda_1 = 0\,; \lambda_2 = 0$, ebben az esetben azonnal az első két egyenletből azt kapjuk, hogy
$2(x-1) = 0; 2(y-3) = 0$, amiből adódna az $x = 1; y = 3$ megoldás, de visszahelyettesítve ellentmond az $x + y \leq 2$ feltételnek. Tehát ez nem elfogadható megoldás.
<u>2. eset:</u> ha $\lambda_1 = 0\,; \lambda_2 \neq 0$, akkor $x - y = 0; 2(x-1) + \lambda_2 = 0; 2(y-3) - \lambda_2 = 0$. Van három ismeretlen, és három egyenlet, amiből az $x = 2,\ y = 2$ és $\lambda_2 = -2$ megoldást kapnánk, ami nem teljesíti a feltételeket.
<u>3. eset:</u> ha $\lambda_1 \neq 0\,; \lambda_2 = 0$, akkor:

$$x + y - 2 = 0;$$

$$2(x-1) + \lambda_1 = 0;$$

$$-2(x+1) + \lambda_1 = 0$$

Ez a megoldás $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}; \boldsymbol{y} = \mathbf{2}$ és $\lambda_1 = 2$ már megfelelő
<u>4. eset:</u> az $\lambda_1 \neq 0\,; \lambda_2 \neq 0$ esetében a következő egyenleteket kapjuk:

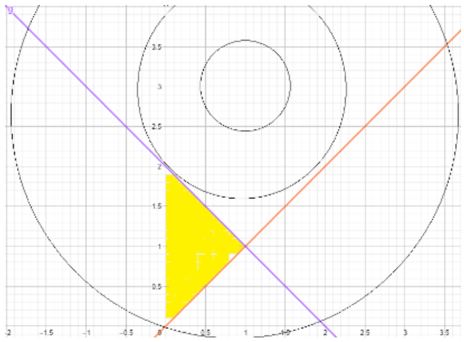
$$x + y - 2 = 0;$$

$$x - y = 0;$$

$$2(x-1) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

$$2(y-3) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

A megoldás pedig $x = 1; y = 1;\ \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -2$, ez ismét nem megfelelő. Nyilván a Kuhn-Tucker megoldás az optimális $[0; 2]$ pont.
Úgy gondoljuk, hogy a grafikus megoldás egyszerűbb lehet és akár helyettesítheti az algebrai módszert is.



4. ábra: A feltételek sárga halmazához közelítünk az (1,3) pontból húzott koncentrikus körökkel (GeoGebrában)

Forrás: saját szerkesztés

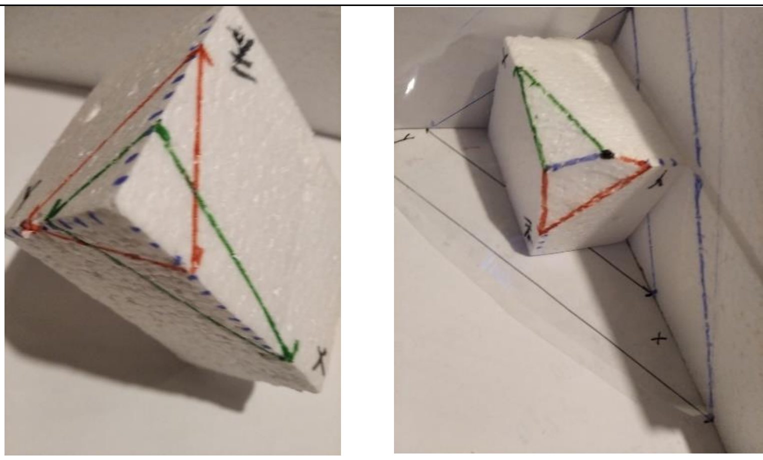
A megoldás mindkét esetben a $[0; 2]$ pont.

6. Egy térbeli feladat grafikus megoldása transzponálás segítségével

A következő példában pedig bemutatjuk a komplementaritás alkalmazását, miszerint meg lehet grafikus módszerrel oldani térbeli feladványokat is. Pedagógusként leginkább itt tűnt fel, hogy milyen síkbeli és térbeli elképzelések, a feltehetően a diákok tudásának hiányosságai végett. Talán ebben segíthetne a probléma egyszerű szemléltetése. A következő példában a célfüggvény maximumát keressük, ha a feltételek 2 térbeli sík alatti térrész közös halmaza:

$$\max 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3, \text{ ha } \begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \leq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \leq 30 \end{cases}$$

A szemléltetés egyszerű, de odafigyelést igényel és feltételezi bizonyos fokig a kézügyességünket is (ha nem számítógéppel oldják). Míg a síkban a közös halmaz képzelete egyszerű, a térben már nehezebben tudunk tájékozódni. Ezért is jó, ha a hallgatók megpróbálják fizikailag is elhelyezni a feltételek síkjait a gazdaságilag értelmezett térrész pozitív nyolcadában. Mindezt megpróbáltuk polisztirol lapokkal szemléltetni (5. ábra)



5. ábra: A feltételek halmazának közös metszetét az általuk meghatározott két sík alatti térrész adja meg, de nem mindegy, hogy a testet hogyan forgatjuk be a térrészbe, és a célfüggvény síkjainak a párhuzamosaival kell közelíteni, párhuzamos síkokkal

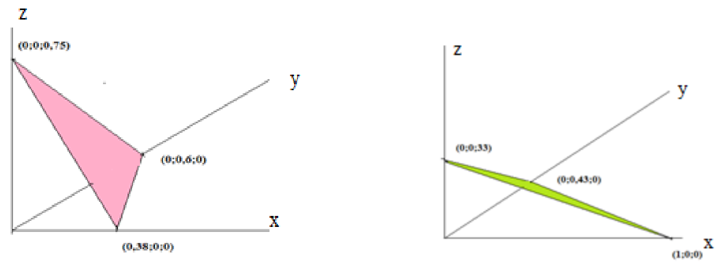
Forrás: saját szerkesztés

Az 5. ábrán látható, hogy átlátszó fóliával közelítünk a kapott poliéderhez, a jobboldali ábrán látható alaplapokon szerkesztett vonalak párhuzamosaival. Ez még eléggé jól elképzelhető és kivitelezhető. Bonyolultabbá válik a feladat, amikor a síkok feletti térrészek közös halmazát kell megállapítani, ezt az imént bemutatott módon, polisztirol lapokkal szeretnénk kivitelezni.

Tekintsük az alábbi feladatot, ahol egy idegenforgalmi vállalatnak 3 részlege van, és a működtetéseinek a feltételeit, illetve a kiadásait, költségeit ($f(u_1, u_2, u_3) = 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3$) minimalizálni szeretnénk. Ezt két egyenlőtlenséggel korlátozzuk ($30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30$ és $80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30$) a fenntarthatóság szempontjából, azaz [5]:

$$\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3, \text{ ha } \begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30 \end{cases};$$

$u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ a $u_3 \geq 0$. Ez egy térbeli 3D feladvány, azért is fontos, mert például az idegenforgalmi vállalatok fenntartóinak az energiaválság idején még jobban oda kell figyelni, hogy például télen melyik részleget kell kifűteni, és melyiket nem éri meg végképpen. Annyit tudunk csupán eldönteni, hogy az egyes síkokban melyik egyenes van felül, és a két egyenes feletti térrészről van szó. A térbeli próbálkozásokkal akár fejleszthetjük a térlátás képességét is, melyben általában elég rosszul teljesítenek a hallgatók. Ha egy konvex poliéder a térrész, akkor az előző feadat „lenyomatával" alkotjuk meg a térrészeket, amelynek a csúcsai az extremális pontok.



6. ábra: A feltételek síkjainak célfüggvény síkjainak a párhuzamosaival kell közelíteni
Forrás: saját szerkesztés

A minimalizálási feladatban alulról közelítünk a fősíkkal, a matematika új fejezetei azonban a komplementaritás segítségével más lehetőséget is kínálnak. A térbeli fő feladványt (prím függvény) egy duál megoldás segítségével transzponáljuk síkbelivé. Tehát 3D-ből transzponáljuk 2D-be, majd miután megállapítottuk, hogy melyik feltétel nem befolyásolja a prím optimumát, visszatranszponálunk.

$\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3$, ha a feltételek

$$\begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30 \end{cases}$$

Megkeressük a feltételek baloldalának a mátrixát, ezt transzponáljuk

$$\begin{pmatrix} 30 & 70 & 90 \\ 80 & 50 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{a transzponálás után} \begin{pmatrix} 30 & 80 \\ 70 & 50 \\ 90 & 40 \end{pmatrix} \text{majd mindezt megoldjuk}$$

a duál segítségével, amikor a feladványok eleje és hátulja felcserélődik. Az előjelek is felcserélődnek, tehát ami $\geq$ az $\leq$ lesz.

$$\max 30x_1 + 30x_2, \text{ ha a feltétel} \begin{cases} 30x_1 + 80x_2 \leq 2400 \\ 70x_1 + 50x_2 \leq 3500 \\ 90x_1 + 40x_2 \leq 3600 \end{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Az első feltétel az f egyenes, a másik feltétel a g és a harmadik a h egyenes segítségével ábrázolható, az egyenesek alatti közös halmaz pedig csakis az f és h alatti terület. A g egyenes tehát nem befolyásolja a félsíkok metszetét, így a kettes egyenes ún. rejtett értéke nulla. A komplementaritás elve alapján ezért a prím feladvány második paramétere ($u_2 = 0$) kell nulla legyen. De elsősorban meg kell állapítani a transzponált feladat optimumát (*). Ha a főfüggvény által meghatározott párhuzamosokkal közelítjük meg a három feltétel közös halmazát, láthatóan a p egyenes éri el egy pontban ezt a halmazt. Ez a pont pedig az f és g metszéspontja.

7. ábra: az f, g, h-val jelzett egyenesek alatti félsíkok közös halmazához közelítünk párhuzamosan p, r-el

Forrás: saját szerkesztés

$$30x_1 + 80x_2 = 2400$$
$$90x_1 + 40x_2 = 3600$$

Az egyenletpáros megoldása $x_1^* = 3{,}2$ és $x_2^* = 1{,}8$. Behelyettesítve a célfüggvénybe

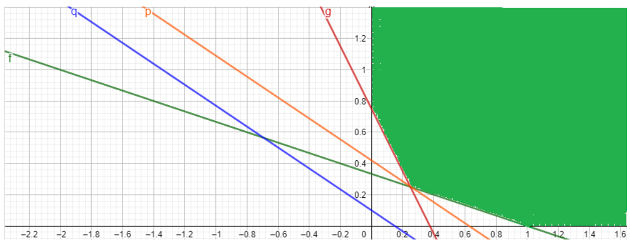
$f^* = 1500$ értéket kapunk.

Az ezredforduló utáni új matematikai fejezetek segítségével tehát megoldható a 3D, hiszen ezt a megoldást visszatranszponáljuk az eredeti feladványba azzal, hogy megállapítottuk, hogy az $u_2 = 0$. a $\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3$, ha a feltétel $\begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30 \end{cases}$

A térbeli feladat redukálódik síkbelivé

$\min 2400u_1 + 3600u_3$, ha a feltétel $\begin{cases} 30u_1 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 40u_3 \geq 30 \end{cases}$

Ami már sikeresen megoldható a síkban, ismét a két egyenes ($30u_1 + 90u_3 = 30; f$) és ($80u_1 + 40u_3 = 30; g$) feletti közös síkrész meghatározásával jön létre a feltételek értelmezési közös halmaza.



8. ábra: Az *f,g* félsíkok közös metszetéhez közelítünk a fő függvénnyel párhuzamosokkal (*p,q*)

Forrás: saját szerkesztés

Ehhez a halmazhoz közelítünk alulról a főegyenessel párhuzamosokkal (p,q), így alulról elérve a közös halmaz első pontját megkapjuk a prím feladat optimumát, ami a minimális költséget jelenti. A feladat tényszerűen megállapítja egy idegenforgalmi vállalatnál, hogy melyik részleget kell és meddig üzemeltetni, és melyiket nem kell pl. éppen a fűtés miatt csak kis lángon temperálva fenntartani, de mindenképpen télire bezárni (a mai energiaviszonyok mellett egyre inkább aktuálissá válik ez a téma).

$$30u_1 + 90u_3 = 30 \ (2)$$

$$80u_1 + 40u_3 = 30 \ (3)$$

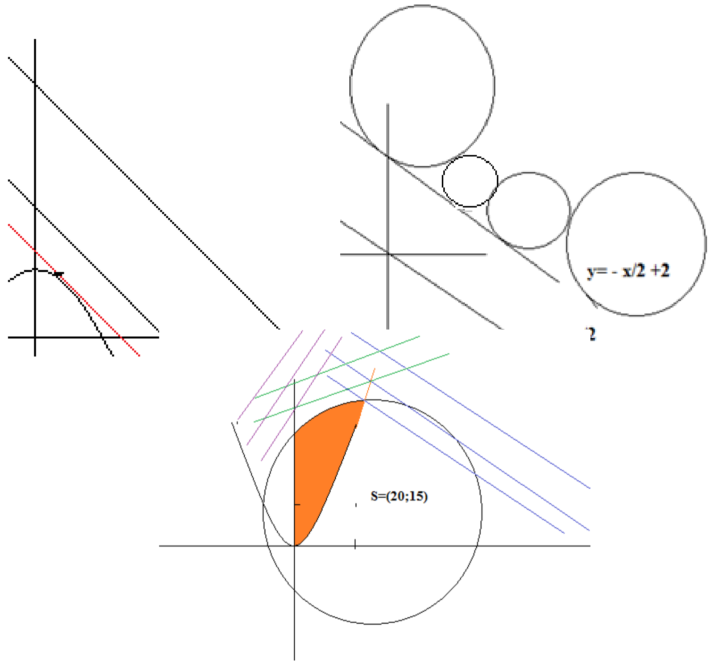
Mivel a kettes egyenes kinullázódik a komplementaritás elve végett, a megoldás a fő feladat (2) és (3) egyeneseinek a metszéspontja. A számítás csak megerősíti az ábrából is leolvasható értékeket, miszerint $u_1^* = 0{,}25$ a $u_3^* = 0{,}25$.

A fő függvény minimalizálásának a megoldása tehát a behelyettesítés után (f*): $\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3 = 2400 * 0{,}25 + 3500 * 0 + 3600 * 0{,}25 = 1500$, ami megegyezik az előző optimummal.

Ezek a geometriai megoldások nagyon igényesek, sok esetben igényeltetik a nagyítás és kicsinyítés, valamint roppant érzékeny éppen a fő függvény iránytényezőjére. Sok esetben pl. hozzá is simulhat egy-egy szakasz részhez, ebben az esetben a megoldás a szakasz összes pontja lehet optimális megoldás [5].

7. Feltételes optimalizálási feladatok megoldásainak szemléltetése

A következő feladatban szemléltetjük egy célfüggvény és egy feltétel példáját, $\max f(x,y) = x + y; g((x,y): x^2 + y = 1$. Ezt a ábrán baloldalon van lerajzolva[9]. Ha a baloldalon levő feladat célfüggvényét és feltételét kicseréljük ($f \leftrightarrow g$), akkor nem párhuzamos egyenesekkel közelítünk, hanem parabolákkal, nagyítással egy konkrét $x + y = 5$ egyeneshez. A középső képen pedig egy másik feladatban körök nagyságát kereshetjük, ennek a $minf(x,y) = x^2 + y^2; g(x,y): x + 2y = 4$ feladatnak a szemléleteséből kitűnik, hogy az adott egyenes pontjaiból (pontpárból) mekkora nagyságú köröket szerkeszthetünk (a középső ábra csak egyszerű szemléltetés, nem pontos ábrázolás). A jobboldali ábrán pedig azt mutatjuk be, hogy egy kör és egy félsík közös halmazához a pozitív síknegyedben milyen fontos, hogy megfelelően és pontosan tudjuk a célfüggvény iránytényezőjét. Párhuzamos egyenesekkel közelítünk, az ábrázolásból kitűnik, hogy pozitív, vagy negatív-e az iránytényező [9].



9. ábra: parabolához közelítés párhuzamos egyenesekkel, középen x, y pontbárból alkotott körök, jobboldalon pedig egy kör és parabola (nemlineáris feladat) közös halmazához közelítünk különböző iránytényezőjű egyenesekkel.
Forrás: saját szerkesztés

8. Befejezés

Az egyetemi példákon keresztül talán érthetővé válik, milyen súlyos következményekkel jár a geometriai hiányosság, a nem megfelelő síkbeli és térbeli képzelet. Felmérések segítségével kezdtük mérni, hogy hogyan és mikor alakul ki a síkbeli látás, térbeli elképzelés. A felsőbb tagozaton az egyszerű feladatok tovább fejlesztésével érthetőbbé vált rajzzal a maradékos és maradéknélküli osztás [7]; középfokon bizonyosan könnyebben volt értelmezhető a valós és képzetes számok levezetése az ábrákon keresztül. Mindebben programok is a segítségünkre lehetnek (pl. Solid Edge), de a 3D szemüveges geometria megértése, rajzolása is [10]. Főiskolai szinten pedig a feltételes optimalizálás is lehetséges a geometria segítségével. Nemcsak a tanáraink, de a hallgatóink is felfedeznek, rácsodálkoznak újabb és újabb ábrázolási módszerekre, lehetőségekre. A feladatok megoldhatóak polisztirol lapok segítségével is, hiszen a síkmetszetek halmaza könnyen kivitelezhető. Van aki a GeoGebrában keresteti a megoldást, a 3D GeoGebra parancshiánya azonban ezt még korlátozza. Gyakorlati jelentősége pedig éppen egy gazdasági korridor szemléltetése, ahol a felszínen maradás határesetei ábrázolandók. A gazdasági matematikában (monopolista) és a valószínűségszámításban egyaránt nyer fokozatosan teret a geometriai szemléltetés. A célunk rendíthetetlenül az, hogy elősegítsük a rajzokkal a rálátást az összefüggésekre, valamint gyakorlati alkalmazásukra, mindezt alátámasztja a tény, hogy új kihívások elé nézünk. A bemutatott példák konkrét közgazdasági problémák újszerű, geometriai megoldásait ismertetik. Az eddig általunk ismert példák nem tartalmaznak kisebbedő, vagy nagyobbodó nemlineáris alakzatokat (kör-gömb, parabola-paraboloid, …), amelyek segítségével közelítünk a feltételek halmazához.

Irodalomjegyzék

[1] Hamala, M.: *Nelineárne programovanie*, (1972). Bratislava: Alfa 47, (pp. 231);

[2] Gass, S. I. *Lineárne programovanie*, (1972). Bratislava: Alfa. (pp. 47);

[3] Fecenko, J.; Pinda, Ľ.: *Matematika 1*. (2006). Bratislava: Iura Edition. (pp. 65);

[4] Fecenko, J.; Sakálová, K.: *Matematika 2*. (2004). Bratislava: Iura Edition. (pp. 59-61, 81);

[5] Sydsaeter, K.: Hammond, P.I.: *Matematika közgazdászoknak*. (2006). Budapest: Aula. (pp. 641-665);

[6] Vrábelová, M.; Markechová D.: *Pravdepodobnosť a štatistika.* (2001). Nitra: UKF. (pp. 24);

[7] Nagy, L. Zs.: *Záhadný svet čísel*, (2021), Nitra: UKF (pp. 68-78);

[8] Pál, I.: *Térgeometria a műszaki gyakorlatban* (1973). (pp. 6, 10,11);

[9] Tóth, A.: *A geometriai megoldások új szerepe a gyakorlatban* (2022), XXV. Apáczai Napok, Győr (pp. 58-66);

[10] Tóth, A; Sedláková, M. *Geometriai vizualizáció a gyakorlatban*, (2021) OxiPO, (pp. 83-95). https://doi.org/10.35405/OXIPO.2021.1.83