Alkotások összekapcsolása problémák láncolatával

Katona János[1], Nagy Kem Gyula[2]
[1]egyetemi docens, [2]főiskolai tanár
[1,2] Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar
E-mail: [1]katona.janos@uni-obuda.hu, [2]nagy.gyula@uni-obuda.hu
DOI: 10.29180/978-615-6342-61-4_2

Összefoglalás: Gondolatok láncolatát ismertetjük egy elképzelt hálózatban, amelyek összeköthetnek nem feltétlenül kortárs szerzőket és problémákat. Esetünkben Luca Pacioli és Csernyák László közötti kapcsolatra próbálunk egy lehetséges gondolatsort összeállítani. Írásunkban bemutatjuk alkotásaik és szellemi munkájuk párhuzamait. Leonardo által Pacioli művében többszörösen is illusztrált poliéderre, majd a rajzok egyik vélt hibájára adunk magyarázatot.

Kulcsszavak: matematika történet, matematika didaktika, LP, poliéderek, hálózatok

Abstract: We describe a chain of ideas in an imagined network that may not necessarily connect contemporary authors and problems. In our case, we are trying to put together a possible path of thought for the relationship between Luca Pacioli and László Csernyák. In our article, we present the parallels between their creation and intellectual work. We will explain the polyhedron illustrated several times by Leonardo in Pacioli's work, and then one of the supposed errors in the drawings.

Keywords: mathematics history, mathematics didactics, LP, polyhedra, networks,

1. Bevezetés

Luca Pacioli leghíresebb művei:
Summa de arithmetica, geometria, ratio et proporcionalita. Velence. 1494.
Olasz nyelven íródott enciklopédikus mű az elméleti és gyakorlati aritmetikáról; az algebra elemei; a használt pénzek, súlyok és mértékek táblázata; értekezés a kettős könyvvitelről, a szerencsejátékokat is tanulmányozta pl. az igazságos osztozkodást.
1496 körül Pacioli és Leonardo barátok lettek, ekkor kezdte második leghíresebb művét, amelyet Leonardo illusztrált, mintha ma Cameron vagy Spielberg kísérletet tenne a Poincaré-sejtés jelentésének és Gregory Perelman általi bizonyításának megértésére.

Divina Proportion 1497-98
Az ábrákat Leonardo rajzolta, nyomtatásban jóval később1509-ben jelent meg [1], Eukleidész Elemeinek latin fordításával. ;Pacioli művei összefoglalják az akkoriban ismert matematikát, bár egyes matematika történeti kutatók szerint kevés bennük az eredeti ötlet, viszont nagyban segítették a matematika európai fejlődését, tanítottak; hasonlóan Csernyák által szerkesztett, írt könyvekhez, könyvfejezetekhez, különös tekintettel igaz ez az operáció kutatás témakörére. Csernyák László általa szerkesztett, ezekben fejezeteket írott és kiadott legismertebb oktatási anyagok:
Analízis, Valószínűségszámítás, Operációkutatás I,-II.
Műveinek hatása a gazdaságtudományi értelmiség matematika oktatásában, gondolkodásának fejlesztésében alapvető. Utóbbi két mű újdonsága és olvashatósága miatt nemcsak a gazdasági felsőoktatásban használatos. Gyakorlati feladataival nemcsak matematikusok számára lesz kizárólag érthető, tehát közérthető a matematika modern ágának két fejezete. Itt előzményként feltétlenül meg kell említenünk Prékopa, Krekó és Bacskay által írt műveket [2-5]. Csernyák művei a köz- és üzemgazdászok tekintetében hasznosságukban hasonlíthatók ezen művekhez, illetve Rényi: Valószínűségszámítás, vagy Hajós: Bevezetés a geometriába c. művéhez, amelyek méltán lettek a matematika szakosok manuáljai.
Csernyák Szegeden évfolyamának egyik legtehetségesebb hallgatója [6], kandidátusi fokozatát 1975-ben szerezte ortogonális sorok elméletéből [7]. Az 1975 és1979 között védett kandidátusi értekezések közül megemlítünk néhányat az 1. ábrán.

Néhány kandidátusi értekezés matematikából 1975-79-ig

- BABAI LÁSZLÓ: Gráfok automorfizmuscsoportjai. 1975.
- BERKES ISTVÁN: Hézagos sorok és függetlenség. 1975.
- **CSERNYÁK LÁSZLÓ: Ortogonális sorok konvergenciájára vonatkozó vizsgálatok. 1975.**
- CSIRIK JÁNOS: On-line számítógépes képkiértékelő rendszer. 1977.
- FRANKL PÉTER: Extremális halmazrendszerek. 1978.
- GERENCSÉR LÁSZLÓ: Nemlineáris programozási feladatok megoldása szekvenciális módszerekkel. 1976
- GYÖRFI LÁSZLÓ: A többhipotézises döntéselmélet néhány kérdése. 1976.
- SZABÓ JÓZSEF: Az Eckhart-féle összemetszési eljárás egy általánosítása és annak néhány komputergrafikai alkalmazása. 1978.
- SZALAY ISTVÁN: Fourier-sorok általánosított abszolút Cesaro szummálhatóságának vizsgálata. 1976.
- RECSKI ANDRÁS: Matroidok és villamos hálózatok. 1976.
- RÚZSA Z. IMRE: Absztrakt struktúrába képező számelméleti függvények. 1977.
- TUSNÁDY GABOR: Statisztikai hipotézisek vizsgálata. 1977.

1. ábra

Egy egyszerű az Operációkutatás II.-ben tárgyalt lineáris programozási feladat általánosításával áttérünk egy Pacioli könyvében tárgyalt, Leonardo által többszörösen is illusztrált poliéderre, majd a rajzok gerjesztette tévedések, hibák elemzésére.

2. Előzmények

Rácz János matematika munkaközösség vezetőm ajánlására 1985-től felvételi előkészítők vezetésében vettem részt a PSZF-en (második szerző), ekkor találkoztam először Csernyák Lászlóval, aki barátságos, segítőkész kollégáival oktatásra, alkotásra kész tanszéket épített [6], [8]. Egy ideje itt is oktatok tanszékvezetőnk Takács Anna jóvoltából, akivel korábban több MAFIOK konferencián is találkoztam. Látható, hogy a szociális háló hasznos a munka világában is.

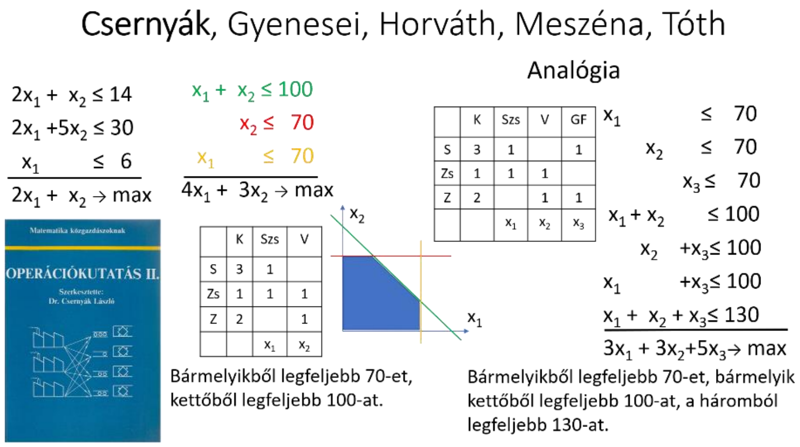
Karinthy Frigyes szerint [9]: *Annak bizonyításául, hogy a Földgolyó lakossága sokkal közelebb van egymáshoz, mindenféle tekintetben, mint ahogy valaha is volt, próbát ajánlott fel a társaság egyik tagja. Tessék egy akármilyen meghatározható egyént kijelölni a Föld másfél milliárd lakója közül, bármelyik pontján a Földnek - ő fogadást ajánl, hogy legföljebb öt más egyénen keresztül, kik közül az egyik neki személyes ismerőse, kapcsolatot tud létesíteni az illetővel, csupa közvetlen - ismeretség - alapon, mint ahogy mondani szokták: "Kérlek, te ismered X. Y.-t, szólj neki, hogy szóljon Z. V.-nek, aki neki ismerőse..." stb* [9]
A hálózat elmélet „hat lépés távolság” elmélete szerint [10] bármely két ember egy ismeretségi láncon keresztül kapcsolatba hozható úgy, hogy a két végpont között maximálisan öt ember, azaz hat kapcsolat van. Természetesen lehet ellenpéldát kreálni, de az állítás az esetek többségében teljesül.
A következőkben közös ismerős helyett, közös gondolattal, közös problémával, feladattal kapcsolunk össze embereket. Természetes, hogy minél általánosabban ismert egy feladat, egy gondolat, annál könnyebben találunk ilyen kapcsolatot.

3. Egy LP feladattól Luca Pacioliig

E fejezetben Csernyák által szerkesztett Operációkutatás II. egyik feladatától néhány gondolattal eljutunk Pacoli könyvének a Divina Proportione egyik Leonardo által készített ábrájáig.

3.1. Egy egyszerű LP feladat (1. láncszem)

Egy egyszerű Lineáris Programozási feladat megoldását látjuk a 2. ábra bal oldalán. A feladat az Operációkutatás II. 1.1-es példája a célszerű egyszerűsítések 15. oldal (1.6a) után [11]. Színessel egy másik a geometriai szemléltetés vonatkozásában egyszerűbb feladatot látunk és e feladatnak egy általánosítását a 2. ábra jobb oldalán. Feltüntetjük a társszerzőket is: Gyenesei, Attila, Horváth Gézáné, Meszéna György, Tóth Irén. A tárgyalásunk szempontjából a célfüggvény nem igazán lényeges, ezért csak a lehetséges megoldások halmazát vizsgáljuk. Ezt a halmazt a kék ötszög szemlélteti a 2. ábrán.

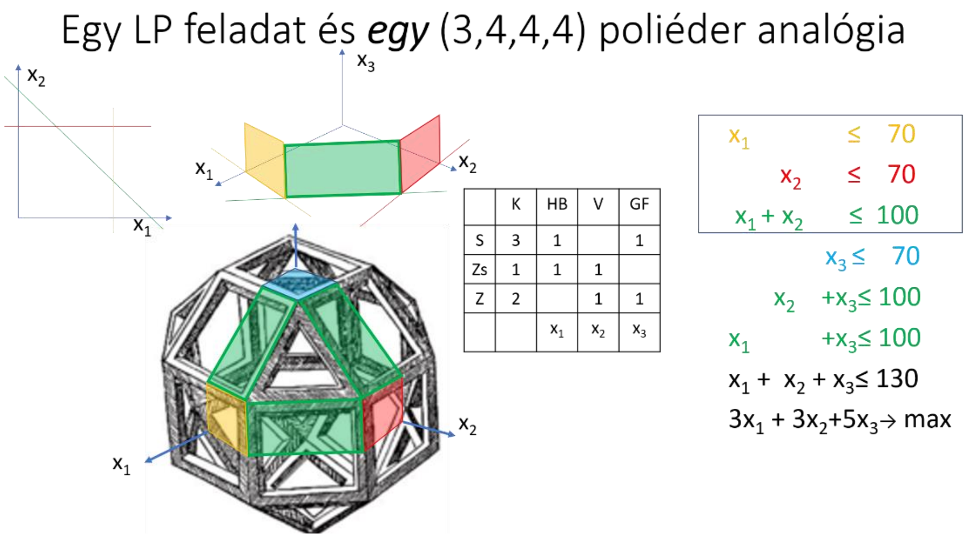


2. ábra

3.2. Egy három változós LP feladat (2. láncszem)

A jobb oldalon látható általánosabb feladat lehetséges megoldásainak szemléltetéséhez már a térbeli háromdimenziós koordináta rendszerre lesz szükség. A 2. ábra jobb oldalán látható feltétel rendszernek megfelelő vektorokhoz tartozó halmazt szemléltetjük a 3. ábrán. Az ábra jobb oldalán megismételtük a feltételrendszert és egy keretbe foglaltuk a kétváltozós feladathoz tartozó egyenlőtlenségeket. Ezen egyenlőtlenségek megoldáshalmazainak határoló síkjait a sárga négyzet, zöld téglalap és a piros négyzet szemlélteti a 3. ábra közepén felül. Az alatta levő ábra részlet már a teljes lehetséges megoldás halmaz határait szemlélteti, amelyet az egyenlőtlenségek színeinek megfelelő színű síkok határolnak. Az utolsó egyenlőtlenségnek megfelelő síkot nem szemléltettük. A hét egyenlőtlenségnek megfelelő nemnegatív megoldások halmaza a megfelelő hét sík által meghatározott origót tartalmazó féltereknek a közös része a nem negatív térnyolcaddal. (Ez nagyon hasonló, de nem teljesen egyező a 3. ábrán látható alakzattal).

(3. láncszem) Ha ezt a megengedett megoldások halmazát tükröznénk az origóra, a tengelyekre, illetve a koordináta síkokra, akkor egy a sraffozott rajzon élváz- szerűen ábrázolt poliéderhez nagyon hasonló P testhez jutnánk, amely már megtalálható Leonardo Pacioli második könyvéhez készített illusztrációi között. A pontosság megköveteli, hogy megváltoztassuk egyenlőtlenségeink jobb oldalán álló konstansokat.



3. ábra

3.3. A három változós LP feladat illesztése a poliéderhez (4. láncszem)

A három változós feladatunkban szereplő konstansokat a következő *(1)*-es állítás szerint kell megváltoztassuk:

(1) a zöld téglalapok hosszabb oldala megegyezzen a kék, sárga, piros színű négyzetek oldalának kétszeresével.

Feltéve, hogy az egyenlőtlenségek közül az egy ismeretlent tartalmazók jobb oldalán egy pozitív *a* szám áll, akkor a 2. ábrán látható kékszínű csonkolt négyzet oldalának hossza is *a*. Az *(1)*-es feltétel akkor teljesül, ha az

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2}\mathrm{a}$$

Ekkor a két változót tartalmazó egyenlőtlenségek mindegyikének jobb oldala is $\sqrt{2}\mathrm{a}$. A három változót tartalmazó egyenlőtlenség konstansának számolása során meghatározzuk a lehetséges megoldások halmazát tartalmazó poliéder háromszöglapja egyik csúcsának koordinátáit. A következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2}\mathrm{a}$$
$$x_1 = \mathrm{a}$$

Amiből $x_2 = \sqrt{2}\mathrm{a} - \mathrm{a}$, ami megegyezik x_3-mal, hiszen mindkettő megegyezik a 3. ábrán látható sárga négyzet oldalával. A három változót tartalmazó egyenlőtlenség a következő: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\sqrt{2}\mathrm{a} - \mathrm{a}$

E konstansokkal a háromváltozós feladat azon lehetséges megoldások halmazát adja, amelyből már az egyik (3,4,4,4) félig szabályos poliéderhez jutunk az előző fejezetben leírt tükrözésekkel.

4. ábra

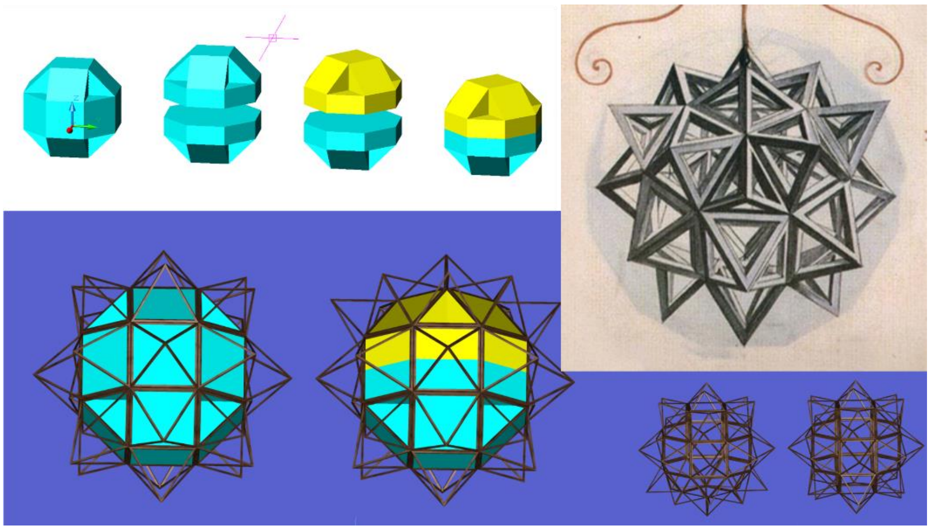
A 4. ábrán balra fent a mű címoldala, alatta az előző 3. ábrán élvázmodellel szemléltetett test látható, hogy teljes legyen a poliéder fogalom bemutatása, a 4. ábra Jacopo De Barbari festményének bal felső sarkában a tárgyalt poliéderünknek egy felület modellje látható. E három értelmezés mindegyike előfordul, mint diákjaink által elképzelt poliéder fogalom. Nagyon fontos, hogy fogalmainkat tisztázzuk, hiszen csak ebben az esetben tudunk eredményesen oktatni. [12-16]

Erdős Pál előadásaiban többször arról a KÖNYV-ről tesz említést, amelyben Isten a tételek tökéletes bizonyításait tartja, ezek szépek, érthetőek és tovább már nem igazán egyszerűsíthetők. E könyvben biztosan helye van az Euler féle poliéder tételre vonatkozó Hajós féle bizonyításnak, így a Platoni szabályos poliédereknek, talán a félig szabályosaknak is. Ezek közül többet ábrázolt Leonardo a Divina Proportione-ban.

4. További megjegyzések a (3,4,4,4) poliéderhez

Leonardo rajzaiból nem derül ki, hogy felületmodellt vagy a tömör testet ábrázolja-e; a poliéderek élvázmodelljein kívül azok síklapjaira gúlákat, illetve azok élvázait illeszti és ezeket az új csillag-szerű testeket is ábrázolja, ahogy ezt az 5. ábra jobb felső részén is látjuk. Vajon miért? Talán az esztétika miatt?

Paccioli könyvét nyomtatták, nem tudjuk a példányszámot, így az illusztrációkat másolni kellett, a metszeteket már valószínűleg nem a Mester készítette. Két kézirat, egy genovai és egy milánói, valamint egyetlen velencei nyomtatott példány maradt fenn. Ezek különböznek egymástól, az illusztrációk hibákat is tartalmaznak [17-19]. A milánói tűnik eredetinek.



5. ábra

Az 5. ábra jobb felső rajza mindegyik fennmaradt példányban azonos, a következő idézet a Scientific American-ből [18] származik és ugyanerre az ábrára vonatkozik és hibás: *„egy háromszög alakú piramist mindig hat négyszög alakú piramis vesz körül. De da Vinci rajzán (ismét reprodukálva, közvetlenül lent) ez nem így van: az ábra alján lévő piramisnak négy oldaléle van, bár háromnak kellene lennie… a piramis lefelé mutató rajza egyértelműen hibás."* Sajnos ez az állítás nem igaz. Az ellentmondást az 5. ábra bal felső ábra sorozata oldja fel, mivel két különböző test létezik, igaz, a gúlák nélküli rajzok a sorozat első poliéderéből származnak míg a vitatottak, a gúlákkal bővítettek a sorozat utolsó poliéderéből származtathatók. Két lehetséges magyarázatot adtunk az előadásban.

5. Összegzés

Írásunkban párhuzamot vontunk Luca Pacioli és Csernyák tanár úr munkássága között. Műveiknek hatása nemcsak a gazdaságtudományi értelmiség, hanem általában a matematika oktatásában, gondolkodásának fejlesztésében jól használható. Csernyák László által szerkesztett Operációkutatás II. egyik feladatától analógiák felhasználásával eljutottunk a

Pacoli könyvének a Divina Proportione egyik Leonardo által készített ábrájáig. Végül egyik illusztrált poliéder által gerjesztett vélt hibát tárgyaltuk.

Irodalomjegyzék

[1] Pacioli L. *Divina Proportion*. Paganini, Velence. 1509.

https://archiviostorico.mediobanca.com/wp-content/uploads/2021/01/De-Divina-Proportione.pdf

https://archive.org/details/divinaproportion00paci/page/n257/mode/2up

[2] Krekó, B. és Bacskay, Z. (1957) *Bevezetés a Lineáris programozásba*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

[3] Krekó, B. (1962) *Lineáris programozás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

[4] Prékopa, A. (1968) *Lineáris Programozás*. Bolyai Társulat, 1969

[5] Forgó Ferenc és Komlósi Sándor: *Krekó Béla szerepe a közgazdászképzés modernizálásában Krekó Béla (1915-1994) emlékére* 2015;

http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2188/1/Kreko_paper.pdf

[6] Kispéter József Tóth László. *Kispéter József Ifjan – Éretten – Öregen- 80 kérdés–válasz közel nyolc évtizedről -Beszélgettárs: Tóth László*. Miskolc technika Alapítvány. 2014;

[7] N. Abaffy Csilla, Tőzsér Ágnes. *Kandidátusi és doktori disszertációk (1975. február 1 - 1979. december 31.*. MTA Könyvtára. 1981;

[8] Horváth Antal. *Apro(po)ságok.* 2015;

https://ttk.elte.hu/media/7f/dd/c019a0e91a858a70960a44931c9ea57fc03e2a385564682734431fb990b8/Horvath_Antal_gyemantdiplomas_verses_visszaemlekezesei.pdf

[9] Karinthy Frigyes. *Láncszemek*. Új Idők 1933. https://mek.oszk.hu/07300/07367/html/01.htm#54

[10] https://hu.wikipedia.org/wiki/Hat_lépés_távolság

[11] Csernyák László: Operációkutatás I-II. Budapest. Nemzeti Tankönyvkiadó. 1990.

[12] Katona János; Takács Anna; Nagy Kem Gyula. *Matematikai versenyeink és a problémamegoldó gondolkodás* In: Temesvári, Zsolt; Wührl, Tibor; Molnár, György (szerk.) XXXVIII. Kandó Konferencia 2022 - Kiadvány kötet Budapest Óbudai Egyetem, Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar 408 355-364. 2022;

[13] Nagy Kem Gyula; Katona János. *Matematikai Versenyeink*, Matematikai lapok 2017-2018/1 pp. 1-34. 2021;

[14] Katona, J, Nagy Kem, Gy. *The CAD 3D course improves students' spatial skills in the technology and design education.* Ybl Journal Of Built Environment 7 : 1 pp. 26-37. , 12 p. 2019; https://doi.org/10.2478/jbe-2019-0002

[15] Nagy, Gy. *Developing Problem-solving Skills*. Mathematics Competition 29: 2 pp 26-41. 2016;

[16] Nagy Gy. *A problémamegoldás megismerésének magyar módszere*. Matematikai Lapok 2015/2 44-56. 2015;

[17] Etienne, N. *Luca Pacioli. De Divina Proportione (1498)*. La Renaissance italienne. Peintres et poètes dans les collections genevoises. Milan. Skira. 210-215. 2006

[18] Huylebrouck, D. *Lost in Triangulation: Leonardo da Vinci's Mathematical SlipUp.* Scientific American, March 29 2011; http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=davinci-mathematical-slip-up

[19] Huylebrouck, D. *Observations about Leonardo's drawings for Luca Pacioli*

https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1311/1311.2855.pdf